Mesure de l'épaisseur d'un film alimentaire

Bac 2025 Métropole Jour 2 · Exercice 1 **11 points** **Durée conseillée 1 h 56**

Q1 Établir l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u_C = \dfrac{E}{\tau}$ vérifiée par la tension u_C, et donner l'expression du temps caractéristique τ.

Interrupteur fermé, on oriente le courant i et on note u_R la tension aux bornes du conducteur ohmique, en convention récepteur (schéma).

Loi des mailles : $E = u_R + u_C$.

Loi d'Ohm : $u_R = R\,i$.

Condensateur : $q = C\,u_C$ et $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, donc $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (C constante).

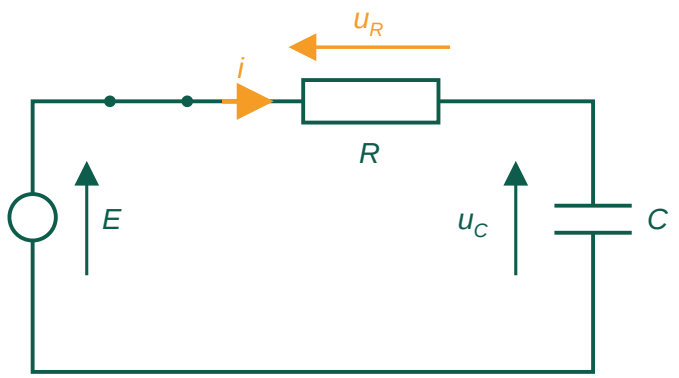
On remplace : $E = RC\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$, puis on divise par RC :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$$

On retrouve l'équation demandée, avec $\tau = RC$.

PIÈGE
Oublier de diviser par RC : le coefficient devant $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ doit valoir 1 avant d'identifier τ.

MÉTHODE
Circuit RC : 1) schéma avec i et les flèches de tension ; 2) loi des mailles ; 3) loi d'Ohm et $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$; 4) mise sous la forme de l'énoncé, puis identification de τ.



Q1 · Montage de la figure 2, interrupteur fermé : courant et tension u_R ajoutés

Q2 La solution est $u_C(t) = A\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$. Déterminer l'expression de la constante A.

On dérive la solution : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{A}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

On reporte dans l'équation différentielle :

$$\frac{A}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{A}{\tau}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) = \frac{E}{\tau} \quad \text{soit} \quad \frac{A}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

$A = E$, donc $u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$

COMPRENDRE
Vérification rapide : quand t devient très grand, l'exponentielle tend vers 0 et u_C tend vers A. Or le condensateur chargé a la tension E du générateur à ses bornes (asymptote de la figure 3).

Q3 Exprimer, en fonction de E, la tension $u_C(\tau)$ à la date $t = \tau$.

$u_C(\tau) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-\tau/\tau}\right) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)$

$u_C(\tau) = 0{,}63\,E$

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$1 - e^{-1}$

$\approx$ 0.6321206

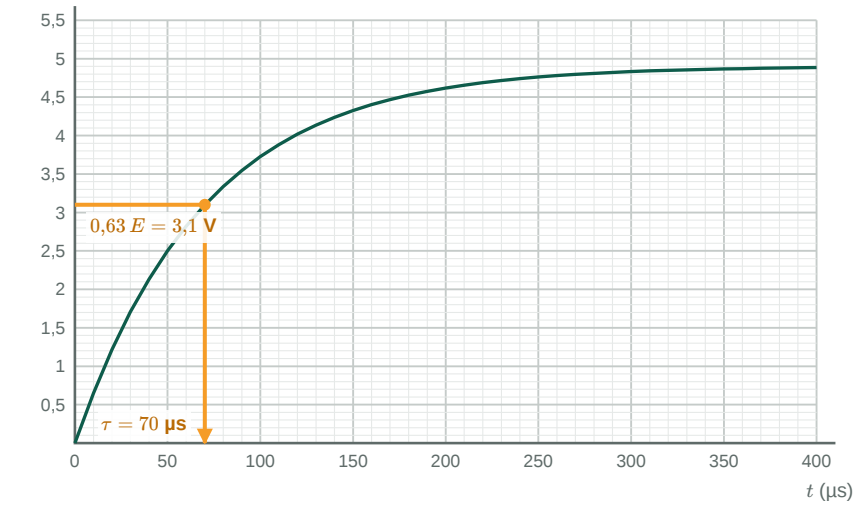
Q4 Exploiter la courbe de la figure 3 et le résultat de Q3 pour déterminer la constante de temps τ du circuit, en explicitant la démarche.

Données utiles $E = 4{,}9$ V ; $u_C(\tau) = 0{,}63\,E$ (Q3)

$u_C(\tau) = 0{,}63 \times 4{,}9 = 3{,}1$ V.

Sur la figure 3, on trace l'horizontale d'ordonnée 3,1 V jusqu'à la courbe, puis on descend verticalement jusqu'à l'axe des temps : l'abscisse lue est τ.

$\tau \approx 70\ \mu$s



Q4 · Figure 3 du sujet, avec la lecture de τ

COMPRENDRE

Une graduation horizontale vaut 10 µs : la lecture donne τ à quelques microsecondes près, soit deux chiffres significatifs, comme E.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

0.63×4.9

$\approx$ 3.087

Q5 En déduire une valeur expérimentale de la capacité C du condensateur.

Données utiles $R = 1{,}00\ \text{k}\Omega$; $\tau = 70\ \mu$s (Q4)

$\tau = RC$ donc $C = \dfrac{\tau}{R}$

$$C = \frac{70 \times 10^{-6}}{1{,}00 \times 10^{3}} = 7{,}0 \times 10^{-8}\ \text{F}$$

$C = 7{,}0 \times 10^{-8}$ F $= 70$ nF

PIÈGE

Laisser τ en microsecondes ou R en kilohms : il faut des secondes et des ohms pour obtenir des farads.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{70 \times 10^{-6}}{1.00 \times 10^{3}}$

$\approx 7 \times 10^{-8}$

Q6 Déterminer l'épaisseur e_{film} du film alimentaire déduite de la valeur moyenne de la capacité.

Données utiles $C = 69{,}8$ nF ; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F · m^{-1} ; $\varepsilon_{r,\text{film}} = 2{,}3$; armatures de 21 cm × 28 cm

$C = \dfrac{\varepsilon_0\,\varepsilon_{r,\text{film}}\,S}{e_{\text{film}}}$ donc $e_{\text{film}} = \dfrac{\varepsilon_0\,\varepsilon_{r,\text{film}}\,S}{C}$, avec $S = 0{,}21 \times 0{,}28$ m^2.

$$e_{\text{film}} = \frac{8{,}85 \times 10^{-12} \times 2{,}3 \times 0{,}21 \times 0{,}28}{69{,}8 \times 10^{-9}} = 1{,}7 \times 10^{-5}\ \text{m}$$

$e_{\text{film}} = 1{,}7 \times 10^{-5}$ m $= 17\ \mu$m

PIÈGE
Calculer la surface en cm^2 : ε_0 est en F · m^{-1}, les deux longueurs se convertissent en mètres avant le produit.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{8.85 \times 10^{-12} \times 2.3 \times 0.21 \times 0.28}{69.8 \times 10^{-9}} \approx 1.714719 \times 10^{-5}$

Q7 Discuter de l'accord du résultat de Q6 avec l'épaisseur de référence du film.

Données utiles $e_{\text{film}} = 17\ \mu$m (Q6) ; $e_{\text{film,ref}} = 7{,}6\ \mu$m ; $u(e_{\text{film}}) = 1{,}0\ \mu$m

On calcule le quotient proposé par l'énoncé :

$$\frac{|e_{\text{film}} - e_{\text{film,ref}}|}{u(e_{\text{film}})} = \frac{17 - 7{,}6}{1{,}0} = 9{,}4$$

Le quotient vaut $9{,}4$, très supérieur à 2 : la mesure par capacimétrie n'est pas en accord avec la valeur de référence.

COMPRENDRE
L'écart à la référence représente plus de neuf incertitudes-types. On admet l'accord quand ce quotient ne dépasse pas 2 : ici la dispersion des mesures ne peut pas expliquer l'écart, il faut chercher un défaut du modèle.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{17 - 7.6}{1.0} \approx 9.4$

Q8 En envisageant deux cas limites du schéma de la figure 4, vérifier que l'expression de C' est compatible avec l'expression de la capacité d'un condensateur plan donnée dans l'énoncé.

Premier cas limite, pas de couche d'air : $e_{\text{air}} = 0$.

$$C' = \frac{\dfrac{\varepsilon_0\,S}{e_{\text{film}}}}{\varepsilon_{r,\text{film}}} = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_{r,\text{film}}\,S}{e_{\text{film}}}$$

C'est la capacité d'un condensateur plan dont l'isolant est le film seul.

Second cas limite, pas de film : $e_{\text{film}} = 0$.

$$C' = \frac{\dfrac{\varepsilon_0\,S}{e_{\text{air}}}}{\varepsilon_{r,\text{air}}} = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_{r,\text{air}}\,S}{e_{\text{air}}}$$

C'est la capacité d'un condensateur plan dont l'isolant est l'air seul.

Dans les deux cas on retrouve $C = \dfrac{\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,S}{e}$: l'expression de C' est compatible avec celle des données.

Q9 Dans ce modèle, déterminer l'épaisseur d'air e_{air} en prenant pour le film l'épaisseur de référence. Commenter.

Données utiles $C' = 69{,}8$ nF ; $e_{\text{film,ref}} = 7{,}6\ \mu$m ; $\varepsilon_{r,\text{air}} = 1{,}0$; $\varepsilon_{r,\text{film}} = 2{,}3$; $S = 0{,}21 \times 0{,}28$ m^2

La capacité mesurée est maintenant C'. On isole e_{air} :

$$\frac{e_{\text{air}}}{\varepsilon_{r,\text{air}}} + \frac{e_{\text{film}}}{\varepsilon_{r,\text{film}}} = \frac{\varepsilon_0\, S}{C'} \quad \text{donc} \quad e_{\text{air}} = \varepsilon_{r,\text{air}} \left(\frac{\varepsilon_0\, S}{C'} - \frac{e_{\text{film}}}{\varepsilon_{r,\text{film}}} \right)$$

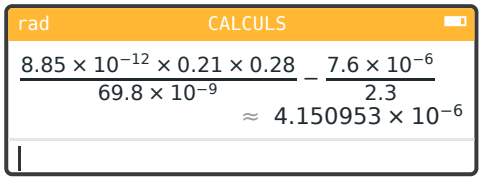
$$e_{\text{air}} = 1{,}0 \times \left(\frac{8{,}85 \times 10^{-12} \times 0{,}21 \times 0{,}28}{69{,}8 \times 10^{-9}} - \frac{7{,}6 \times 10^{-6}}{2{,}3} \right) = 4{,}2 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

Commentaire : cette épaisseur est du même ordre de grandeur que celle du film, donc pas négligeable. Quelques micromètres d'air entre des feuilles souples posées à la main sont plausibles : l'hypothèse explique l'écart constaté en Q7.

$e_{\text{air}} = 4{,}2 \times 10^{-6}\ \text{m} = 4{,}2\ \mu\text{m}$

COMPRENDRE
L'air a une permittivité relative 2,3 fois plus faible que le film : à épaisseur égale, il fait baisser davantage la capacité. Une couche d'air très fine suffit donc à fausser la mesure de Q6.

À LA CALCULATRICE



Q10 Calculer l'épaisseur e_{film} du film alimentaire dans le rouleau.

Données utiles $\ell = 29$ cm ; $L = 30$ m ; $\rho_{\text{film}} = 1{,}25 \times 10^3$ kg · m^{-3} ; $m_{\text{film}} = 70{,}56$ g

Le film déroulé est un pavé droit de volume $V = \ell \times L \times e_{\text{film}}$.

$$\rho_{\text{film}} = \frac{m_{\text{film}}}{V} = \frac{m_{\text{film}}}{\ell\, L\, e_{\text{film}}} \quad \text{donc} \quad e_{\text{film}} = \frac{m_{\text{film}}}{\rho_{\text{film}}\, \ell\, L}$$

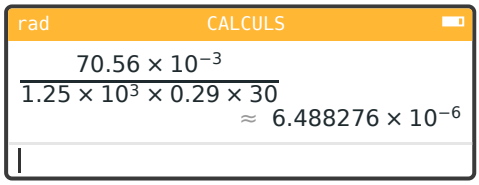
$$e_{\text{film}} = \frac{70{,}56 \times 10^{-3}}{1{,}25 \times 10^3 \times 0{,}29 \times 30} = 6{,}5 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

$e_{\text{film}} = 6{,}5 \times 10^{-6}\ \text{m} = 6{,}5\ \mu\text{m}$

PIÈGE
Trois conversions à ne pas manquer : la masse en kilogrammes, la largeur en mètres, et le résultat en micromètres pour le comparer aux autres méthodes.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs seulement, comme ℓ et L, malgré la masse donnée avec quatre. Le résultat est du même ordre de grandeur que la référence ($7{,}6\ \mu$m).

À LA CALCULATRICE



Q11 Préciser la relation entre δ et λ permettant d'obtenir des interférences constructives.

Les interférences sont constructives quand les deux ondes se superposent en phase : la différence de chemin optique est un multiple entier de la longueur d'onde.

$\delta = k\,\lambda$, avec k entier relatif

PIÈGE
Ne pas préciser que k est un entier : sans cette précision, la relation ne dit rien.

Q12 Préciser, en justifiant sans calcul, le phénomène observé lorsque le rapport $\dfrac{\beta \times e_{\text{film}}}{\lambda}$ est un nombre entier.

D'après la relation 1, si $\dfrac{\beta \times e_{\text{film}}}{\lambda}$ est un entier, alors $p = \dfrac{\delta}{\lambda}$ est un entier augmenté de $\dfrac{1}{2}$: c'est un demi-entier.

On a donc $\delta = \left(k + \dfrac{1}{2}\right) \lambda$ avec k entier : les deux ondes se superposent en opposition de phase.

On observe des interférences destructives (intensité minimale pour cette longueur d'onde).

COMPRENDRE
L'ordre d'interférence résume tout : p entier, interférences constructives ; p demi-entier, interférences destructives.

Q13 Le spectre de la figure 6b présente des maxima d'intensité, dont certains sont entourés en pointillés. Expliquer leur origine.

En lumière blanche, chaque longueur d'onde a son propre ordre d'interférence p, puisque p dépend de λ (relation 1).

Pour les longueurs d'onde telles que p est entier, les rayons ① et ② interfèrent de façon constructive : l'intensité captée est maximale. Entre deux de ces longueurs d'onde, p passe par un demi-entier : les interférences sont destructives et l'intensité présente un creux.

Les maxima entourés correspondent aux longueurs d'onde pour lesquelles les interférences entre les rayons ① et ② sont constructives (p entier).

COMPRENDRE
Ces oscillations sont absentes du spectre de la source (figure 6a) : elles viennent bien du film. Deux maxima voisins correspondent à deux ordres entiers consécutifs, d'où les valeurs 32 à 37 de la figure 7.

Q14 Indiquer, en justifiant, si les résultats expérimentaux sont cohérents avec la relation 1.

Données utiles modélisation de la figure 7 : $p = 22\,443 \times \dfrac{1}{\lambda} + 0{,}51$ (λ en nm)

La relation 1 s'écrit $p = (\beta \times e_{\text{film}}) \times \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{2}$: p est une fonction affine de $\dfrac{1}{\lambda}$, d'ordonnée à l'origine $0{,}5$.

Sur la figure 7, les points expérimentaux sont alignés sur une droite qui ne passe pas par l'origine, et l'ordonnée à l'origine du modèle, $0{,}51$, est très proche de $0{,}5$.

Les résultats expérimentaux sont cohérents avec la relation 1.

MÉTHODE
Confronter des mesures à une loi : 1) écrire la loi sous la forme $y = a\,x + b$ en identifiant x et y aux grandeurs tracées ; 2) vérifier l'alignement des points ; 3) comparer b à la valeur prévue.

Q15 Déduire de ces mesures la valeur de l'épaisseur e_{film} du film alimentaire, sachant que $\beta = 3{,}02$. Commenter.

Données utiles coefficient directeur de la droite modèle : $22\,443$ nm ; $\beta = 3{,}02$; $e_{\text{film,ref}} = 7{,}6\ \mu\text{m}$

Par identification du coefficient directeur (Q14) : $\beta \times e_{\text{film}} = 22\,443$ nm, puisque λ est en nanomètres.

$$e_{\text{film}} = \frac{22\,443}{\beta} = \frac{22\,443}{3{,}02} = 7{,}43 \times 10^{3}\ \text{nm}$$

Commentaire : cette valeur s'écarte de la référence ($7{,}6\ \mu\text{m}$) d'environ $2\,\%$ seulement. La capacimétrie donnait $17\ \mu\text{m}$ et la pesée $6{,}5\ \mu\text{m}$: l'interférométrie est la méthode la plus exacte des trois.

$e_{\text{film}} = 7{,}43 \times 10^{3}\ \text{nm} = 7{,}43\ \mu\text{m}$

PIÈGE
Se tromper d'unité : le coefficient directeur est en nanomètres car l'abscisse est en nm^{-1}. L'épaisseur sort en nanomètres, à convertir en micromètres pour la comparer.

À LA CALCULATRICE

