Exercice 1 - Mesure de l'épaisseur d'un film alimentaire (11 points)



Les films alimentaires étirables sont des films plastiques souples et transparents utilisés principalement pour conserver les aliments. Ils sont fabriqués en polymères tels que le polyéthylène basse densité (PEBD) et parfois le polychlorure de vinyle (PVC). Ces films offrent une barrière contre l'air, l'humidité et les contaminants, aidant ainsi à prolonger la fraîcheur des aliments et à réduire les déchets alimentaires. L'épaisseur du film est un paramètre essentiel des propriétés mécaniques (élasticité, résistance à la traction) des films étirables, ainsi que de leur impact écologique.

L'objectif de cet exercice est d'étudier différentes méthodes de détermination de l'épaisseur d'un film alimentaire.

1. Mesure de l'épaisseur d'un film alimentaire par capacimétrie

Données :

- un condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques, parallèles entre elles, chacune de surface S, séparées par un matériau isolant (papier, plastique) d'épaisseur e ;
- expression littérale de la capacité C d'un tel condensateur :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot S}{e}$$

avec : • $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F·m^{-1} : permittivité du vide ;
• ε_r : permittivité relative du matériau isolant ;

- permittivité relative du film alimentaire étudié : $\varepsilon_{r,\,film} = 2{,}3$;
- permittivité relative de l'air : $\varepsilon_{r,\,air} = 1{,}0$;
- épaisseur de référence du film alimentaire : $e_{film,\,ref} = 7{,}6$ µm ;
- pour discuter de l'accord du résultat d'une mesure avec une valeur de référence, on peut utiliser le quotient $\frac{|x - x_{ref}|}{u(x)}$ avec x la valeur mesurée, x_{ref} la valeur de référence et $u(x)$ l'incertitude-type associée à la valeur mesurée x.

On réalise un condensateur plan en intercalant entre deux feuilles de papier aluminium rectangulaires, de dimensions 21 cm × 28 cm, une seule couche du film transparent d'épaisseur e. On note C sa capacité. La figure 1 ci-dessous présente un schéma de ce dispositif.

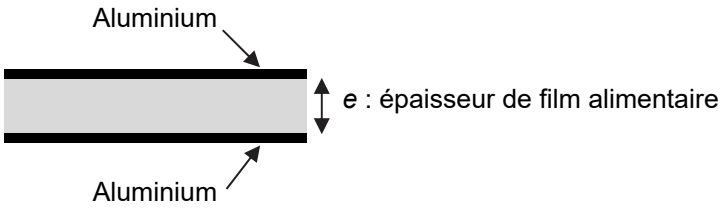


Figure 1. Vue en coupe du condensateur plan

On réalise ensuite le montage, schématisé en figure 2, constitué du condensateur réalisé, d'un conducteur ohmique de résistance R = 1,00 kΩ, d'un interrupteur et d'un générateur idéal délivrant une tension continue E = 4,9 V.

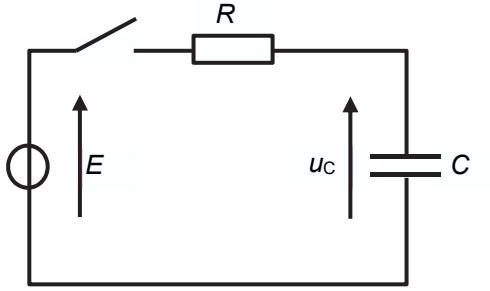


Figure 2. Schéma du montage électrique

On étudie la charge du condensateur à partir de la date $t = 0$, date à laquelle l'interrupteur est fermé. L'évolution temporelle de la tension u_C aux bornes du condensateur est présentée en figure 3.

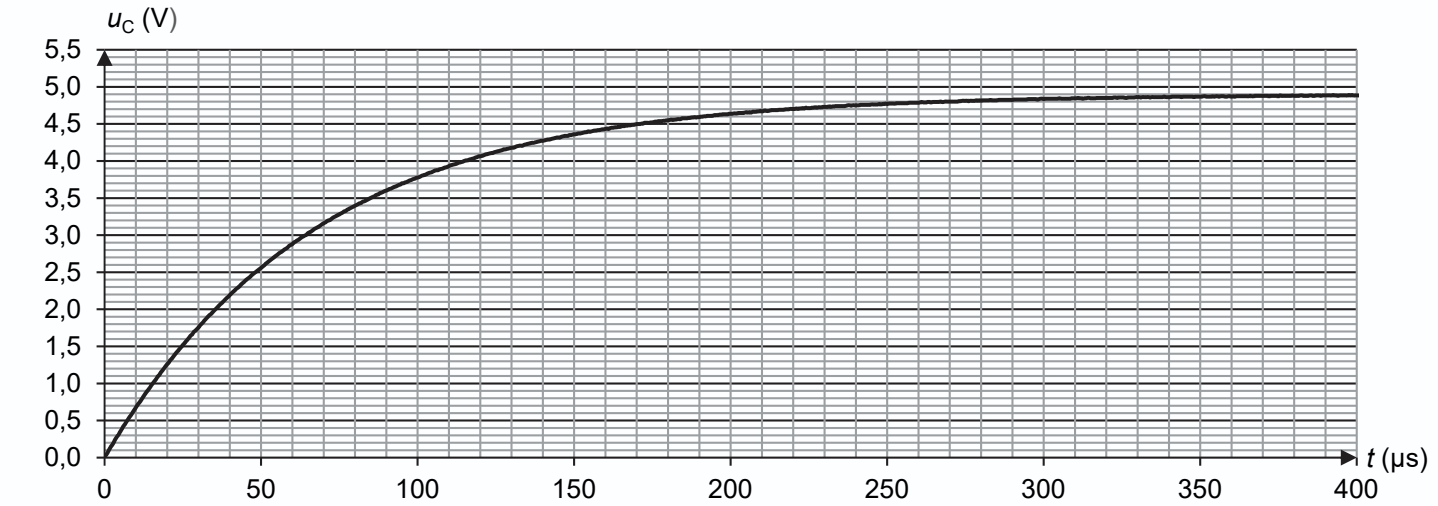


Figure 3. Évolution de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps

Q1. Établir l'équation différentielle ci-dessous vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur, où τ est le temps caractéristique dont on donnera l'expression :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau}u_c = \frac{E}{\tau}$$

La solution de cette équation différentielle est : $u_c(t) = A \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ où A est une constante.

Q2. Déterminer l'expression de la constante A.

Q3. Exprimer, en fonction de E, la tension $u_c(\tau)$ aux bornes du condensateur à la date $t = \tau$.

Q4. Exploiter la courbe de la figure 3 et le résultat obtenu à la question **Q3** pour déterminer la valeur de la constante de temps τ du circuit. Expliciter la démarche utilisée.

Q5. En déduire une valeur expérimentale de la capacité C du condensateur.

Des mesures complémentaires répétées ont permis de déterminer une valeur moyenne de la capacité du condensateur : $C = 69{,}8$ nF.

Q6. Déterminer la valeur de l'épaisseur e_{film} du film alimentaire déduite de cette valeur moyenne.

Avec cette méthode, l'incertitude-type sur l'épaisseur du film a pour valeur : $u(e_{film}) = 1{,}0$ µm.

Q7. Discuter de l'accord du résultat obtenu à la question **Q6** avec la valeur de l'épaisseur de référence du film indiquée dans les données.

Pour expliquer l'écart observé, on peut faire l'hypothèse qu'il existe entre les feuilles d'aluminium, en plus de l'épaisseur du film alimentaire, une fine couche d'air d'épaisseur e_{air} constante. La situation est alors schématisée sur la figure 4 ci-dessous.

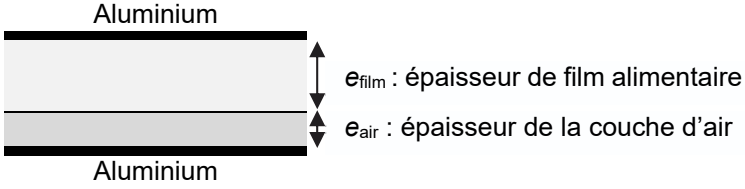


Figure 4. Couche d'air piégée dans le condensateur

On montre que la capacité C' d'un condensateur, dans le cas où le condensateur comprend une épaisseur d'air e_{air} et une épaisseur de film e_{film}, est donnée par la relation :

$$C' = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{\frac{e_{air}}{\varepsilon_{r,\,air}} + \frac{e_{film}}{\varepsilon_{r,\,film}}}$$

Q8. En envisageant deux cas limites au schéma présenté en figure 4, vérifier que l'expression donnée ci-dessus est compatible avec l'expression littérale de la capacité d'un condensateur précisée dans les données.

Q9. Dans ce modèle, déterminer la valeur d'épaisseur d'air e_{air} en considérant que l'épaisseur du film alimentaire est celle de référence : $e_{film,ref}$ = 7,6 µm. Commenter.

2. Mesure de l'épaisseur du film alimentaire par pesée

Données :

- dimensions du film alimentaire indiquées sur l'emballage : largeur ℓ = 29 cm et longueur L = 30 m ;
- masse volumique du polymère constituant le film alimentaire : $\rho_{film} = 1{,}25 \times 10^3$ kg.m^{-3}.

Afin d'estimer un ordre de grandeur de l'épaisseur du film alimentaire, on mesure la masse de film d'un rouleau neuf : m_{film} = 70,56 g.

Q10. Calculer l'épaisseur e_{film} du film alimentaire dans le rouleau.

3. Mesure de l'épaisseur du film alimentaire par interférométrie

Dans le but d'obtenir une mesure plus exacte de l'épaisseur du film alimentaire, on utilise une méthode interférométrique dans laquelle on éclaire le film avec une source lumineuse comme indiqué sur la figure 5 ci-dessous.

On ne s'intéresse dans cette étude qu'à deux rayons lumineux ① et ② issus d'un même rayon incident, comme représenté sur la figure 5 :

- rayon ① : rayon issu du rayon incident qui est réfléchi sur la surface supérieure du film alimentaire ;
- rayon ② : rayon issu du rayon incident qui est transmis dans le film puis réfléchi par la surface inférieure du film et qui ressort par la surface supérieure du film.

Les rayons ① et ② sont parallèles entre eux. Grâce à une lentille, ils se superposent à l'entrée d'une fibre optique, elle-même reliée à un spectromètre.

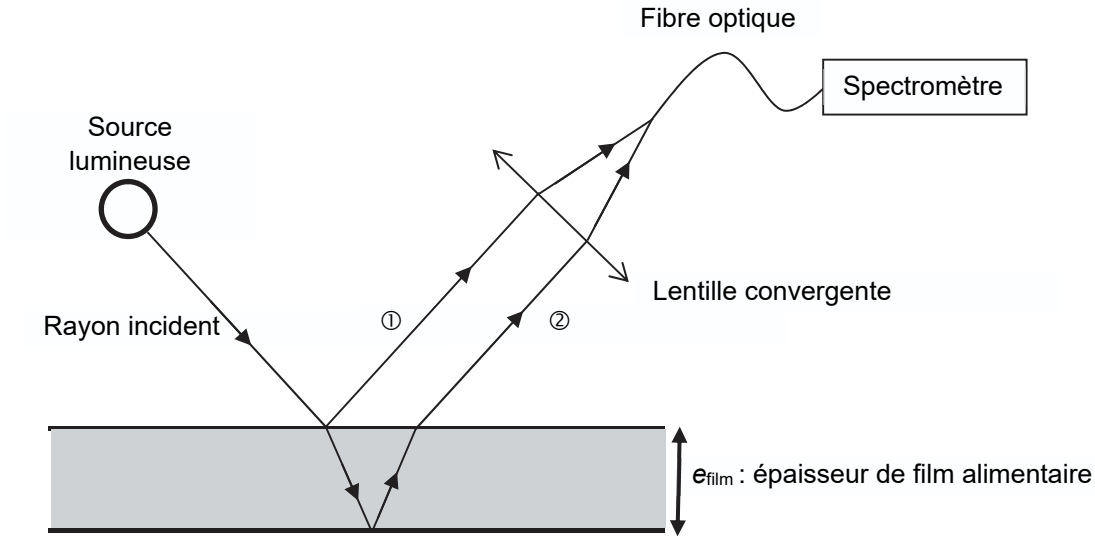


Figure 5. Dispositif expérimental

Pour une source monochromatique de longueur d'onde λ, la superposition des deux ondes associées aux rayons ① et ② donne lieu à des interférences. On note δ la différence de chemin optique entre les deux ondes.

Q11. Préciser la relation entre δ et λ permettant d'obtenir des interférences constructives.

L'ordre d'interférence p est, dans le cas général, défini comme le rapport $p = \frac{\delta}{\lambda}$. On admet que, dans les conditions de l'expérience, l'ordre d'interférence p est donné par la relation suivante :

$$p = \frac{\beta \times e_{film}}{\lambda} + \frac{1}{2} \qquad \text{relation 1}$$

où β est un paramètre sans dimension dépendant de l'indice de réfraction du film et de l'angle d'incidence de la lumière sur le film.

Q12. Préciser, en justifiant sans calcul, le phénomène observé lorsque le rapport $\frac{\beta \times e_{film}}{\lambda}$ est un nombre entier.

Dans l'expérience étudiée, le film est éclairé en lumière blanche et on analyse le spectre de la lumière transportée par la fibre. On donne ci-dessous sur la figure 6a le spectre de la lumière incidente et sur la figure 6b celui de la lumière captée par la fibre optique.

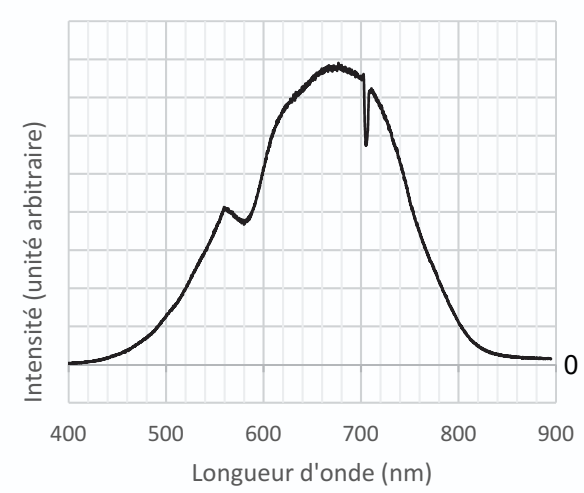


Figure 6a. Spectre de la lumière incidente

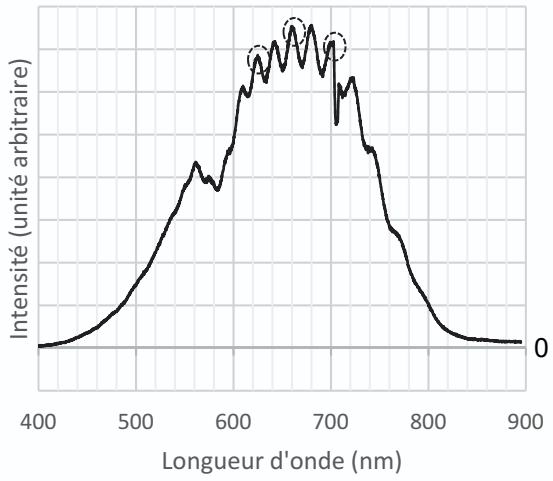


Figure 6b. Spectre de la lumière captée par la fibre optique

Q13. Le spectre de la figure 6b présente des maxima d'intensité dont certains sont entourés en pointillés. Expliquer leur origine.

L'analyse de la figure 6b permet de représenter l'évolution de l'ordre d'interférence en fonction de l'inverse de la longueur d'onde. Les résultats obtenus et leur modélisation sont représentés sur la figure 7.

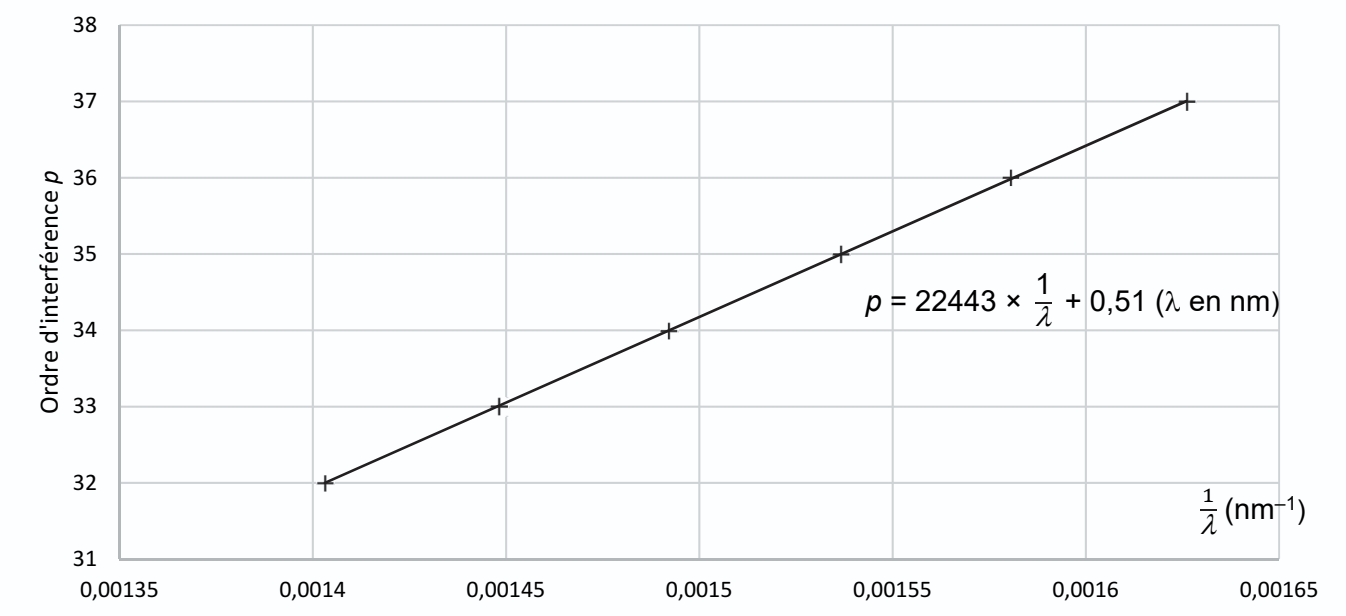


Figure 7. Représentation graphique de l'ordre d'interférence p en fonction de $\frac{1}{\lambda}$

Q14. Indiquer, en justifiant, si les résultats expérimentaux sont cohérents avec la relation 1.

Q15. Déduire de ces mesures la valeur de l'épaisseur e_{film} du film alimentaire, sachant que, dans les conditions de l'expérience, β = 3,02. Commenter.