Viscosimètre à chute de bille

Bac 2025 Métropole Jour 1 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

Q1 Montrer, par un raisonnement sur les unités, que la viscosité η_C s'exprime en $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{s}$.

Données utiles $\vec{f} = -\alpha\cdot\eta_C\cdot v\cdot\vec{k}$; α est homogène à une distance

La valeur de la force de frottement est $f = \alpha\cdot\eta_C\cdot v$, d'où $\eta_C = \dfrac{f}{\alpha\cdot v}$.

Or f est en N, α en m et v en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$:

$$\text{unité de } \eta_C = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}\times\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}} = \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}$$

η_C s'exprime bien en $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{s}$.

MÉTHODE
Pour trouver l'unité d'une grandeur : l'isoler dans une relation connue, remplacer chaque grandeur par son unité, puis simplifier comme dans un calcul littéral.

Q2 Préciser, en justifiant, si la valeur de la force de frottement augmente ou diminue quand la vitesse de la bille augmente.

La valeur de la force de frottement est $f = \alpha\cdot\eta_C\cdot v$, où α et η_C sont des constantes positives : f est proportionnelle à v.

Quand la vitesse de la bille augmente, la valeur de $\vec{f}$ **augmente**.

Q3 Représenter sur un schéma, sans calcul et en justifiant, les forces appliquées au système {bille} lorsque la vitesse limite est atteinte.

Une fois la vitesse limite atteinte, le mouvement de la bille est rectiligne uniforme dans le référentiel terrestre galiléen. D'après le principe d'inertie, les forces se compensent :

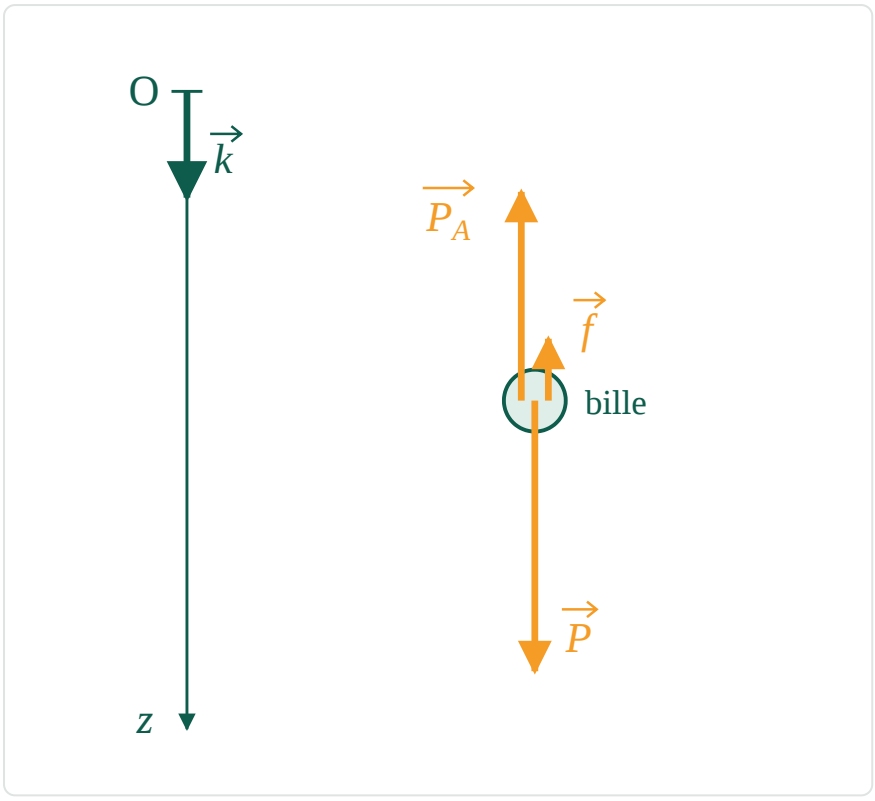
$$\vec{P} + \vec{P}_A + \vec{f} = \vec{0}$$

- le poids $\vec{P}$ est vertical, vers le bas (sens de $\vec{k}$) ;
- la poussée d'Archimède $\vec{P}_A$ et la force de frottement $\vec{f}$ sont de sens opposé à $\vec{k}$: verticales, vers le haut.

Sur le schéma, les trois forces partent du centre de la bille et la longueur de $\vec{P}$ est égale à la somme des longueurs de $\vec{P}_A$ et de $\vec{f}$.

PIÈGE
Dessiner des flèches de longueurs quelconques. À vitesse constante la somme des forces est nulle : la flèche du poids doit être aussi longue que les deux flèches vers le haut mises bout à bout.

COMPRENDRE
« Sans calcul » : seuls les directions, les sens et la compensation sont attendus. On ne peut pas dire laquelle de $\vec{P}_A$ ou $\vec{f}$ est la plus grande sans application numérique.



Q3 · Forces sur la bille à la vitesse limite : $P = P_A + f$ (flèches du haut légèrement écartées pour la lisibilité)

Q4 Montrer que la vitesse limite vérifie $\alpha \cdot \eta_C \cdot v_{lim} = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot g \cdot (\rho_b - \rho_h)}{3}$.

Données utiles $V_b = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$; $\vec{P}_A = -\rho_h \cdot V_b \cdot g \cdot \vec{k}$

À la vitesse limite : $\vec{P} + \vec{P}_A + \vec{f} = \vec{0}$ (Q3). En projection sur l'axe (Oz), orienté vers le bas :

$$m \cdot g - \rho_h \cdot V_b \cdot g - \alpha \cdot \eta_C \cdot v_{lim} = 0$$

La masse de la bille est $m = \rho_b \cdot V_b$, donc :

$$\alpha \cdot \eta_C \cdot v_{lim} = \rho_b \cdot V_b \cdot g - \rho_h \cdot V_b \cdot g = V_b \cdot g \cdot (\rho_b - \rho_h)$$

Avec $V_b = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$:

$$\boxed{\alpha \cdot \eta_C \cdot v_{lim} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot g \cdot (\rho_b - \rho_h)}{3}}$$

PIÈGE
Confondre les deux masses volumiques : le poids fait intervenir celle de la bille ($m = \rho_b \cdot V_b$), la poussée d'Archimède celle de l'huile déplacée (ρ_h).

Q5 Calculer la valeur de la viscosité η_C de l'huile C.

Données utiles $v_{lim} = 5{,}37\ \text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$; $r = 0{,}993\ \text{mm}$; $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $\rho_b = 1{,}06 \times 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $\rho_h = 8{,}31 \times 10^2\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $\alpha = 1{,}92 \times 10^{-2}\ \text{m}$

D'après la relation de Q4 :

$$\eta_C = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot g \cdot (\rho_b - \rho_h)}{3 \cdot \alpha \cdot v_{lim}}$$

$$\eta_C = \frac{4 \times \pi \times (0{,}993 \times 10^{-3})^3 \times 9{,}81 \times (1{,}06 \times 10^3 - 8{,}31 \times 10^2)}{3 \times 1{,}92 \times 10^{-2} \times 5{,}37 \times 10^{-3}}$$

$$\boxed{\eta_C = 8{,}9 \times 10^{-2}\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}}$$

PIÈGE
Laisser r en mm et v_{lim} en $\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$. Le rayon est au cube : l'oubli de la conversion fausse le résultat d'un facteur 10^9.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs : $\rho_b = 1\,060\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ n'est connue qu'à la dizaine, donc la différence $\rho_b - \rho_h \approx 2{,}3 \times 10^2\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ aussi. C'est cohérent avec l'incertitude de $0{,}003$ donnée ensuite.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{4\times\pi\times(0.993\times10^{-3})^3\times9.81\times(1.06\times10^3-8.31\times10^2)}{3\times1.92\times10^{-2}\times5.37\times10^{-3}}\approx 0.08936456$$

Q6 Déterminer si la valeur de η_C obtenue expérimentalement est en accord avec la valeur de référence.

Données utiles $\eta_{réf}=0{,}093\ \text{N}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}$; $u(\eta_C)=0{,}003\ \text{N}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}$; $\eta_C=0{,}089\ \text{N}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}$ (Q5)

On calcule le quotient proposé par l'énoncé :

$$\frac{|\eta_C-\eta_{réf}|}{u(\eta_C)}=\frac{|0{,}089-0{,}093|}{0{,}003}=1{,}3$$

Ce quotient est inférieur à 2 : l'écart à la référence représente à peine plus d'une incertitude-type.

Quotient $=1{,}3<2$: la valeur mesurée est **en accord** avec la valeur de référence.

MÉTHODE
Critère usuel : quotient inférieur ou égal à 2, la mesure est compatible avec la référence ; au-delà, elle ne l'est pas. Toujours écrire la comparaison à 2 avant de conclure.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{0.093-0.089}{0.003}\approx 1.333333$$

Q7 À l'aide de la deuxième loi de Newton, montrer que $a=g\cdot\left(1-\dfrac{\rho_h\cdot V_b}{m}\right)-\dfrac{\alpha\cdot\eta_C}{m}\cdot v$.

Système {bille}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; forces : $\vec{P}$, $\vec{P}_A$ et $\vec{f}$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P}+\vec{P}_A+\vec{f}=m\cdot\vec{a}$, soit

$$m\cdot g\cdot\vec{k}-\rho_h\cdot V_b\cdot g\cdot\vec{k}-\alpha\cdot\eta_C\cdot v\cdot\vec{k}=m\cdot a\cdot\vec{k}$$

En projection sur (Oz) : $m\cdot a=m\cdot g-\rho_h\cdot V_b\cdot g-\alpha\cdot\eta_C\cdot v$.

On divise par m et on factorise g :

$$a=g\cdot\left(1-\frac{\rho_h\cdot V_b}{m}\right)-\frac{\alpha\cdot\eta_C}{m}\cdot v$$

PIÈGE
Reprendre la somme nulle de Q3. Pendant la phase d'accélération, les forces ne se compensent pas : la somme vaut $m\cdot\vec{a}$. Les points de rédaction vont au système, au référentiel et au nom de la loi.

Q8 En déduire que la vitesse obéit à l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\dfrac{3\,\alpha\cdot\eta_C}{4\cdot\rho_b\cdot\pi\cdot r^3}\cdot v=g\cdot\left(1-\dfrac{\rho_h}{\rho_b}\right)$.

Le mouvement a lieu selon (Oz) : $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. De plus $m=\rho_b\cdot V_b$, donc la relation de Q7 devient :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g\cdot\left(1-\frac{\rho_h\cdot V_b}{\rho_b\cdot V_b}\right)-\frac{\alpha\cdot\eta_C}{\rho_b\cdot V_b}\cdot v=g\cdot\left(1-\frac{\rho_h}{\rho_b}\right)-\frac{\alpha\cdot\eta_C}{\rho_b\cdot V_b}\cdot v$$

Avec $V_b=\dfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$: $\dfrac{\alpha\cdot\eta_C}{\rho_b\cdot V_b}=\dfrac{3\,\alpha\cdot\eta_C}{4\cdot\rho_b\cdot\pi\cdot r^3}$

En regroupant les termes en v dans le membre de gauche :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{3\,\alpha\cdot\eta_C}{4\cdot\rho_b\cdot\pi\cdot r^3}\cdot v=g\cdot\left(1-\frac{\rho_h}{\rho_b}\right)$$

COMPRENDRE
L'équation est de la forme $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\dfrac{v}{\tau}=\text{constante}$: le coefficient de v est l'inverse du temps caractéristique τ donné ensuite. Quand $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$, on retrouve la vitesse limite de Q4.

Q9 Calculer τ avec la viscosité de référence, puis justifier que la vitesse de la bille est pratiquement égale à sa valeur limite durant tout le mouvement, le tube mesurant environ 15 cm.

Données utiles $\tau = \dfrac{4 \cdot \rho_b \cdot \pi \cdot r^3}{3 \cdot \alpha \cdot \eta_C}$; $\eta_{réf} = 0{,}093\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}$; $v_{lim} = 5{,}37\ \text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$; $H \approx 15\ \text{cm}$

$$\tau = \frac{4 \times 1{,}06 \times 10^3 \times \pi \times (0{,}993 \times 10^{-3})^3}{3 \times 1{,}92 \times 10^{-2} \times 0{,}093} = 2{,}4 \times 10^{-3}\ \text{s}$$

La vitesse limite est pratiquement atteinte au bout de $5\,\tau = 5 \times 2{,}4 \times 10^{-3} = 1{,}2 \times 10^{-2}$ s.

À la vitesse limite, la bille parcourt la hauteur du tube en :

$$\Delta t = \frac{H}{v_{lim}} = \frac{0{,}15}{5{,}37 \times 10^{-3}} = 28\ \text{s}$$

La phase d'accélération ($0{,}012$ s) est environ 2 000 fois plus courte que la chute (28 s).

$\tau = 2{,}4 \times 10^{-3}$ s ; $5\,\tau \ll \Delta t$: la bille est pratiquement à v_{lim} pendant toute la chute.

COMPRENDRE

Pour $t = 5\,\tau$, $v = v_{lim} \cdot (1 - e^{-5})$, soit 99 % de v_{lim}. C'est le critère habituel pour dire qu'un régime permanent est atteint.

MÉTHODE

« Justifier qu'on peut négliger » : comparer deux grandeurs de même nature par un rapport. Ici deux durées ; on peut aussi comparer la distance parcourue en $5\,\tau$ (moins de $0{,}07$ mm) aux 15 cm du tube.

À LA CALCULATRICE

