## Exercice 3 – Viscosimètre à chute de bille (5 points)

Certains équipements mécaniques, comme les moteurs, nécessitent l'utilisation d'huiles de valeur de viscosité contrôlée pour pouvoir fonctionner correctement.
Le but de cet exercice est d'étudier le principe de fonctionnement d'un viscosimètre à chute de bille permettant de mesurer, à température ambiante, la viscosité d'une huile appelée « huile C ».



*Viscosimètre à chute de bille KF40 Brookfields®*

La mesure de la viscosité de l'huile C repose sur l'exploitation de la chute verticale d'une bille en acier dans un récipient cylindrique, rempli de cette huile, représenté sur la figure 1. Le mouvement du centre de masse de la bille est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen, muni d'un repère d'origine O, d'axe vertical (Oz) orienté vers le bas et de vecteur unitaire $\vec{k}$ La situation est schématisée sur la figure 1.

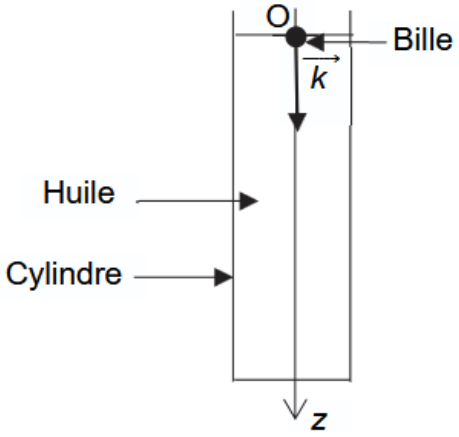



Figure 1. Schéma du dispositif expérimental de mesure

**Données :**

*Les données numériques de cet exercice proviennent de travaux réalisés à l'université de Grenoble.*

- masse volumique de l'huile C : $\rho_h = 8{,}31\times10^{2}$ kg·m$^{-3}$ ;
- masse volumique de la bille : $\rho_b = 1{,}06\times10^{3}$ kg·m$^{-3}$ ;
- rayon de la bille : $r = 0{,}993$ mm ;
- intensité de la pesanteur terrestre : $g = 9{,}81$ m·s$^{-2}$ ;
- volume d'une bille de rayon r : $V_b = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$
- pour discuter de l'accord du résultat d'une mesure avec une valeur de référence, on peut utiliser le quotient $\frac{|x - x_{réf}|}{u(x)}$ avec $x$ la valeur mesurée, $x_{ref}$ la valeur de référence et $u(x)$ l'incertitude-type associée à la valeur mesurée $x$.

Lors de sa chute verticale dans l'huile C, la bille de masse $m$ est soumise à trois forces :

- son poids noté $\vec{P}$ ;
- la poussée d'Archimède, exercée par l'huile, d'expression vectorielle $\vec{P_A} = -\rho_h \cdot V_b \cdot g \cdot \vec{k}$ ;
- la force de frottement exercée par l'huile sur la bille, d'expression vectorielle dans les conditions de l'expérience : $\vec{f} = -\alpha \cdot \eta_C \cdot v \cdot \vec{k}$ avec $\alpha$ une constante homogène à une distance, dépendant des paramètres géométriques du système, $\eta_C$ la viscosité de l'huile C et $v$ la valeur de la vitesse du centre de masse de la bille. On donne $\alpha = 1{,}92\times10^{-2}$ m.

**Q1.** Montrer, à l'aide d'un raisonnement sur les unités, que la viscosité $\eta_C$ s'exprime en $N \cdot m^{-2} \cdot s$.

À la date $t = 0$, la bille est lâchée avec une vitesse initiale nulle depuis le point O, situé dans l'huile, en haut du récipient cylindrique. Au bout de quelques instants, le mouvement de la bille devient rectiligne uniforme, la bille atteint alors une vitesse limite notée $v_{lim}$.

**Q2.** Préciser, en justifiant, si la valeur de la force de frottement $\vec{f}$ augmente ou diminue quand la valeur de la vitesse de la bille augmente.

**Q3.** Représenter sur un schéma, sans calcul et en justifiant, l'ensemble des forces appliquées au système {bille}, lorsque la vitesse limite est atteinte.

**Q4.** Montrer que la vitesse limite vérifie l'équation :

$$\alpha \cdot \eta_C \cdot v_{lim} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot g \cdot (\rho_b - \rho_h)}{3}$$

**Q5.** La valeur limite de la vitesse de la bille vaut $v_{lim} = 5{,}37\ mm \cdot s^{-1}$. Calculer la valeur de la viscosité $\eta_C$ de l'huile C.

L'huile C a une viscosité de référence qui vaut $\eta_{réf} = 0{,}093\ N \cdot m^{-2} \cdot s$ et l'incertitude-type sur la valeur de la viscosité $\eta_C$ obtenue vaut $u(\eta_C) = 0{,}003\ N \cdot m^{-2} \cdot s$.

**Q6.** Déterminer si la valeur de la viscosité $\eta_C$ obtenue expérimentalement est en accord avec la valeur de référence.

On souhaite déterminer la durée nécessaire pour que la bille, lâchée avec une vitesse initiale nulle, atteigne sa vitesse limite.

**Q7.** Le vecteur accélération $\vec{a}$ du centre de masse de la bille s'écrit : $\vec{a} = a \cdot \vec{k}$. À l'aide de la deuxième loi de Newton, montrer que l'accélération $a$ peut s'écrire :

$$a = g \cdot \left(1 - \frac{\rho_h \cdot V_b}{m}\right) - \frac{\alpha \cdot \eta_C}{m} \cdot v$$ où $m$ est la masse de la bille

**Q8.** En déduire que l'évolution de la coordonnée $v$ du vecteur vitesse $\vec{v}$ de chute de la bille au cours du temps obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3\alpha \cdot \eta_C}{4 \cdot \rho_b \cdot \pi \cdot r^3} \cdot v = g \cdot \left(1 - \frac{\rho_h}{\rho_b}\right)$$

Si la bille est abandonnée avec une vitesse initiale nulle, la résolution de l'équation différentielle précédente permet d'obtenir l'expression de sa vitesse $v(t)$ :

$$v(t) = v_{lim} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ avec } \tau = \frac{4 \cdot \rho_b \cdot \pi \cdot r^3}{3 \cdot \alpha \cdot \eta_C}$$

**Q9.** Calculer la valeur de $\tau$ en utilisant la valeur de la viscosité de référence de l'huile étudiée. Justifier que l'on peut considérer que la vitesse de la bille est pratiquement égale à sa valeur limite durant tout le mouvement sachant que le tube du viscosimètre a une hauteur d'environ 15 cm.