Le césium 137 et l'essai Trinity

Bac 2026 Antilles Jour 1 · Exercice 2 **5 points**

Q1 Donner la composition d'un noyau de césium 137.

Données utiles $^{137}_{55}\mathrm{Cs}$

Le numéro atomique est $Z = 55$: le noyau contient 55 protons.

Le nombre de masse est $A = 137$: le noyau contient 137 nucléons, donc $N = A - Z = 137 - 55 = 82$ neutrons.

Le noyau de césium 137 est composé de **55 protons** et de **82 neutrons**.

PIÈGE
Répondre « 137 neutrons » : 137 est le nombre de nucléons (protons et neutrons). Ne pas citer d'électrons : la question porte sur le noyau, pas sur l'atome.

Q2 Écrire l'équation de désintégration de type β du césium 137.

Données utiles $^{137}_{55}\mathrm{Cs}$; noyau fils : $^{137}_{56}\mathrm{Ba}$

On note $^{A}_{Z}\mathrm{X}$ la particule émise avec le noyau de baryum. Lois de conservation :

- nombre de masse : $137 = 137 + A$, donc $A = 0$;
- nombre de charge : $55 = 56 + Z$, donc $Z = -1$.

La particule émise est un électron $^{0}_{-1}\mathrm{e}$: c'est une désintégration β^-.

$$^{137}_{55}\mathrm{Cs} \longrightarrow {}^{137}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$$

COMPRENDRE
Le numéro atomique augmente d'une unité (55 à 56) : un neutron du noyau s'est transformé en proton, avec émission d'un électron. Pour une désintégration β^+, la particule émise serait un positon $^{0}_{1}\mathrm{e}$ et Z diminuerait.

Q3 Établir que l'évolution du nombre N de noyaux de césium 137 est régie par l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$.

Données utiles $A(t) = -\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$; $A(t) = \lambda N(t)$

D'après les données, l'activité s'écrit de deux façons :

$$A(t) = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad A(t) = \lambda N(t)$$

En égalant ces deux expressions : $-\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N$, soit

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$$

COMPRENDRE
Le signe « $-$ » traduit la diminution de N : $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ est négatif, alors qu'une activité est toujours positive.

Q4 Vérifier que $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est solution de l'équation différentielle précédente.

On dérive la fonction proposée par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = N_0 \times (-\lambda)\,\mathrm{e}^{-\lambda t} = -\lambda \times \left(N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\right) = -\lambda N(t)$$

On retrouve bien l'équation différentielle. De plus, à $t = 0$: $N(0) = N_0\,\mathrm{e}^{0} = N_0$, ce qui respecte la condition initiale.

$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$: $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est bien solution.

MÉTHODE
Pour « vérifier qu'une fonction est solution », on ne résout pas l'équation : on dérive la fonction, on remplace dans l'équation et on constate l'égalité. La dérivée de e^{at} est $a\,\mathrm{e}^{at}$.

Q5 Montrer que le temps de demi-vie est lié à la constante radioactive par la relation $t_{1/2} = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$.

Le temps de demi-vie $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents s'est désintégrée : $N(t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$.

Avec $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$:

$$N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{N_0}{2} \quad \text{donc} \quad \mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

En prenant le logarithme népérien : $-\lambda\, t_{1/2} = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, d'où

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}}$$

PIÈGE

Oublier de définir la demi-vie : la relation $N(t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$ est le point de départ attendu.

Attention aussi au signe : $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$.

Q6 Exploiter la courbe de l'annexe 2 pour estimer la valeur de la constante radioactive du césium 137, en an^{-1}, en faisant apparaître la construction graphique.

Données utiles $t_{1/2} = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$ (Q5)

Au bout d'une demi-vie, il reste 50 % des noyaux initiaux. Sur l'annexe, on trace l'horizontale d'ordonnée 50 % jusqu'à la courbe, puis la verticale jusqu'à l'axe des abscisses : on lit $t_{1/2} \approx 30$ ans.

D'après Q5 : $\lambda = \dfrac{\ln(2)}{t_{1/2}}$

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{30} = 2{,}3 \times 10^{-2}\ \mathrm{an}^{-1}$$

$$\boxed{t_{1/2} \approx 30 \text{ ans, donc } \lambda \approx 2{,}3 \times 10^{-2}\ \mathrm{an}^{-1}}$$

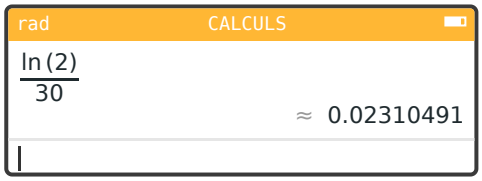
COMPRENDRE

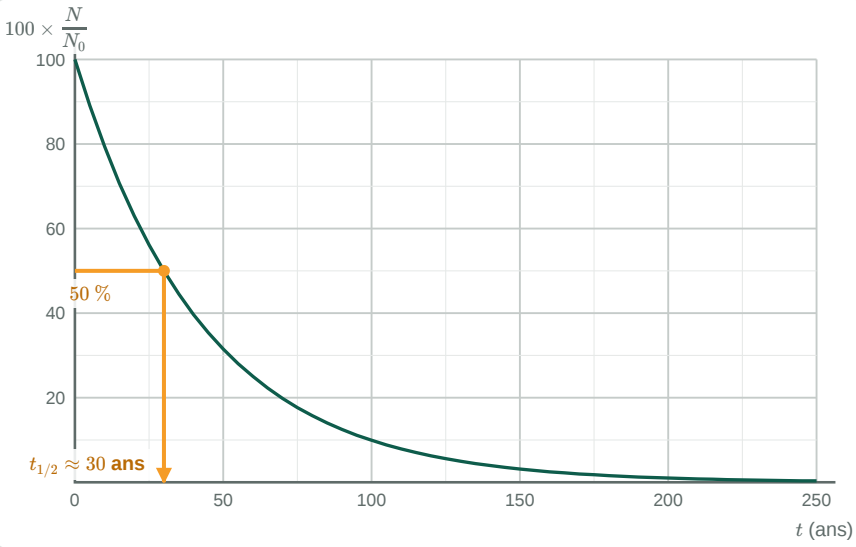
La lecture graphique donne $t_{1/2}$ avec deux chiffres significatifs : on en garde deux pour λ. Le résultat est cohérent avec la valeur $0{,}0231\ \mathrm{an}^{-1}$ fournie dans la partie 2.

MÉTHODE

Vérification possible avec un second point : à $t = 2\,t_{1/2} = 60$ ans, la courbe doit passer par 25 %, ce qui est bien le cas.

À LA CALCULATRICE





Q6 · Annexe 2 complétée : lecture de la demi-vie à 50 %

Q7 Recopier la ligne 9 du programme et la compléter.

Données utiles « pourcentage » désigne $100 \times \dfrac{N}{N_0}$; t en années (ligne 6) ; $\lambda \approx 0{,}023\ \text{an}^{-1}$ (Q6)

D'après Q4, $\dfrac{N}{N_0} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$, donc $100 \times \dfrac{N}{N_0} = 100 \times \mathrm{e}^{-\lambda t}$, avec t en années et λ en an^{-1}.

```
pourcentage = 100*np.exp(-0.023*t)
```

PIÈGE
Oublier le signe « − » (la courbe serait croissante), écrire une virgule décimale au lieu du point, ou omettre le symbole `*` entre la constante et `t`.

COMPRENDRE
On peut aussi écrire `100*np.exp(-np.log(2)/30*t)`, ou définir une variable pour λ sur une ligne précédente. L'unité de λ doit être l'inverse de celle de `t`, ici l'année.

Q8 Montrer que l'activité d'un échantillon de trinitite est donnée par $A(t) = A_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$, où $A_0 = \lambda\, N_0$.

Données utiles $A(t) = \lambda\, N(t)$; $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ (Q4)

L'activité est proportionnelle au nombre de noyaux : $A(t) = \lambda\, N(t)$.

Or $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$, donc

$$A(t) = \lambda\, N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

À la date $t = 0$: $A_0 = A(0) = \lambda\, N_0$.

$A(t) = A_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ avec $A_0 = \lambda\, N_0$

COMPRENDRE
L'activité et le nombre de noyaux suivent la même loi de décroissance, avec la même demi-vie : l'activité est divisée par deux tous les 30 ans environ.

Q9 À partir de l'étude de 2010, déterminer la masse de trinitite à partir de laquelle une demande de détention doit être effectuée en 2026. Commenter cette valeur.

Données utiles $A_{\text{étude}} = 48{,}3$ Bq pour un gramme en 2010 ; $\lambda = 0{,}0231\ \text{an}^{-1}$; seuil : 10 Bq ; $A(t) = A_0\,\text{e}^{-\lambda t}$ (Q8)

Activité d'un gramme de trinitite en 2026. On prend 2010 comme origine des dates ; la durée écoulée est $\Delta t = 2026 - 2010 = 16$ ans.

$$A_{2026} = A_{\text{étude}}\,\text{e}^{-\lambda\,\Delta t} = 48{,}3 \times \text{e}^{-0{,}0231\times 16} = 33{,}4\ \text{Bq}$$

L'activité massique de la trinitite en 2026 est donc $a = 33{,}4\ \text{Bq}\cdot\text{g}^{-1}$.

Remarque sur l'énoncé. Cette activité massique ne dépend pas de la masse de l'échantillon, et elle dépasse déjà $10\ \text{Bq}\cdot\text{g}^{-1}$. Pour qu'une masse limite existe, on interprète le seuil comme une activité de 10 Bq pour l'échantillon détenu.

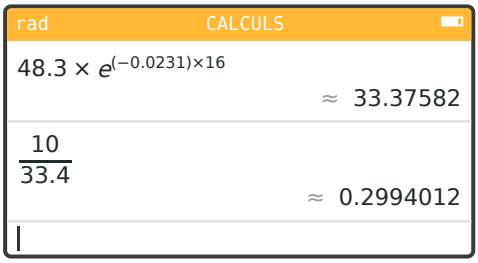
Masse limite. L'activité d'un échantillon de masse m est $A = a \times m$. Le seuil est atteint pour :

$$m_{\text{lim}} = \frac{A_{\text{seuil}}}{a} = \frac{10}{33{,}4} = 0{,}30\ \text{g}$$

Commentaire. Cette masse est très faible : un fragment de trinitite de moins d'un tiers de gramme suffit pour atteindre le seuil. En pratique, presque tout morceau de trinitite nécessite donc une demande de détention en 2026, plus de 80 ans après l'essai.

$A_{2026} = 33{,}4$ Bq pour un gramme, donc $m_{\text{lim}} \approx 0{,}30$ g : masse très faible.

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Utiliser 81 ans (depuis 1945) au lieu de 16 ans : la valeur de 48,3 Bq date de 2010, pas de l'explosion. Garder λ en an^{-1} et Δt en années, sans conversion en secondes.

COMPRENDRE
Tel que l'énoncé rédige le seuil ($10\ \text{Bq}\cdot\text{g}^{-1}$), aucune masse n'est exemptée en 2026. L'activité massique ne repassera sous ce seuil qu'au bout de $\dfrac{\ln(48{,}3/10)}{\lambda} \approx 68$ ans après 2010, soit vers 2078.

MÉTHODE
Question ouverte : annoncer les étapes (activité en 2026, puis masse limite, puis commentaire), signaler toute hypothèse d'interprétation, et conclure par une phrase. Une démarche claire rapporte des points même si le résultat final est discutable.