Le cyclotron Arronax

Bac 2026 Centres étrangers 1 Jour 2 · Exercice 1 **11 points** **Durée conseillée 1 h 56**

Q.1 Montrer que la norme du poids de l'ion H^- est négligeable devant celle de la force électrique $\overrightarrow{F_e}$ qui s'applique sur lui.

Données utiles $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg ; $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C ; $d = 5{,}0$ mm ; $U = 65$ kV ; $E = \dfrac{U}{d}$; $g = 9{,}81\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$

Poids : $P = m\,g = 1{,}67 \times 10^{-27} \times 9{,}81 = 1{,}6 \times 10^{-26}$ N

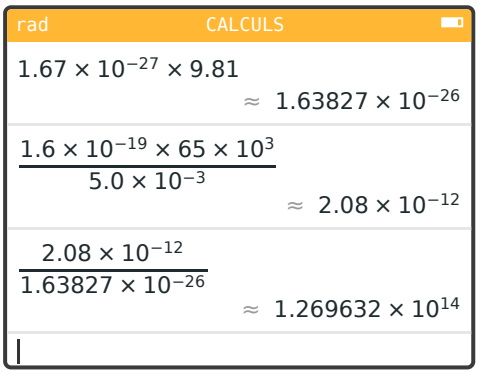
Force électrique : $F_e = |q|\,E = \dfrac{e\,U}{d} = \dfrac{1{,}6 \times 10^{-19} \times 65 \times 10^{3}}{5{,}0 \times 10^{-3}} = 2{,}1 \times 10^{-12}$ N

$\dfrac{F_e}{P} \approx 1{,}3 \times 10^{14}$: le poids est environ 10^{14} fois plus faible que la force électrique, il est **négligeable**.

PIÈGE
Laisser U en kV ou d en mm : il faut 65×10^3 V et $5{,}0 \times 10^{-3}$ m. Une norme est positive : on utilise $|q| = e$.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme e, d et U, les données les moins précises. « Négligeable » se prouve par un rapport chiffré, pas par une simple comparaison de deux valeurs.

À LA CALCULATRICE



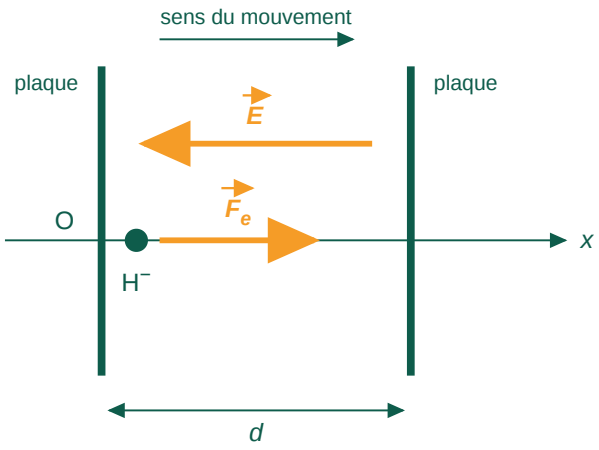
Q.2 Reproduire la figure 2 et y faire apparaître, sans souci d'échelle, la force électrique $\overrightarrow{F_e}$ qui s'applique sur l'ion H^- et le champ électrique $\overrightarrow{E}$ entre les plaques.

L'ion part de O sans vitesse et doit être accéléré vers la droite : $\overrightarrow{F_e}$ est horizontale, dirigée dans le sens du mouvement (sens de l'axe Ox).

Comme $\overrightarrow{F_e} = q\,\overrightarrow{E}$ avec $q = -e < 0$, le champ $\overrightarrow{E}$ a la même direction que la force mais le sens opposé.

$\overrightarrow{F_e}$ est tracée à partir de l'ion vers la droite ; $\overrightarrow{E}$ est horizontal et dirigé vers la gauche.

PIÈGE
Tracer $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F_e}$ dans le même sens : ce n'est vrai que pour une charge positive. La force se dessine avec son origine sur l'ion.



Q.2 · Figure 2 reproduite : en orange, la force électrique et le champ électrique

Q.3 Exprimer l'accélération a_x de l'ion H^- dans la zone accélératrice en fonction de e, U, d et m, en utilisant la deuxième loi de Newton.

Système {ion H^-}, de masse m constante ; référentiel supposé galiléen ; seule force prise en compte : $\vec{F_e}$ (poids négligeable, Q.1).

Deuxième loi de Newton : $\vec{F_e} = m\,\vec{a}$, soit $q\,\vec{E} = m\,\vec{a}$.

En projection sur Ox, le champ étant dirigé vers la gauche : $E_x = -E = -\dfrac{U}{d}$, donc

$$m\,a_x = q\,E_x = (-e) \times \left(-\frac{U}{d}\right)$$

$$\boxed{a_x = \frac{e\,U}{m\,d}}$$

COMPRENDRE
a_x est positive et constante : le mouvement est rectiligne uniformément accéléré dans le sens de l'axe. Les deux signes « $-$ » (charge et sens du champ) se compensent.

Q.4 Montrer que la vitesse et la position de l'ion sur l'axe x s'écrivent $v_x(t) = \dfrac{e\,U}{m\,d} \times t$ et $x(t) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{e\,U}{m\,d} \times t^2$.

Par définition $a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$. On cherche une primitive de a_x, qui est constante :

$$v_x(t) = \frac{e\,U}{m\,d}\,t + C_1$$

Vitesse initiale nulle : $v_x(0) = C_1 = 0$.

De même $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, d'où par primitive :

$$x(t) = \frac{1}{2}\,\frac{e\,U}{m\,d}\,t^2 + C_2$$

L'ion est en O à $t = 0$: $x(0) = C_2 = 0$.

$$\boxed{v_x(t) = \frac{e\,U}{m\,d}\,t \text{ et } x(t) = \frac{1}{2}\,\frac{e\,U}{m\,d}\,t^2}$$

PIÈGE
Oublier les constantes d'intégration ou ne pas les justifier. Chaque constante se détermine avec une condition initiale tirée de l'énoncé, citée explicitement.

Q.5 Calculer la vitesse v_{sortie} de l'ion H^- après le premier passage dans la zone accélératrice, lorsque $x(t) = d$.

Données utiles $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C ; $U = 65$ kV ; $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg ; équations horaires (Q.4)

Date de sortie t_s : $x(t_s) = d$ donne $\frac{1}{2}\frac{eU}{md}t_s^2 = d$, soit $t_s = d\sqrt{\frac{2m}{eU}}$ (racine positive).

On remplace dans la vitesse :

$$v_{\text{sortie}} = \frac{eU}{md} \times d\sqrt{\frac{2m}{eU}} = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

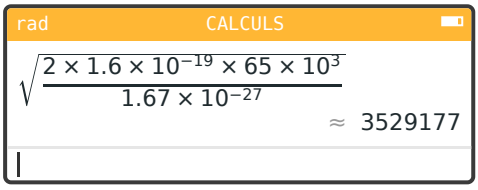
$$v_{\text{sortie}} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 65 \times 10^{3}}{1{,}67 \times 10^{-27}}}$$

$v_{\text{sortie}} = 3{,}5 \times 10^{6}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

COMPRENDRE
La distance d disparaît du résultat : la vitesse de sortie ne dépend que de la tension. Elle reste proche de 1 % de la célérité de la lumière, la mécanique de Newton convient.

MÉTHODE
Vitesse à une position donnée : 1) trouver la date avec $x(t)$; 2) la reporter dans $v_x(t)$; 3) simplifier l'expression littérale avant de calculer.

À LA CALCULATRICE



Q.6 Vérifier que l'énergie cinétique de l'ion H^- à la sortie de la zone accélératrice vaut $E_C = 1{,}0 \times 10^{-14}$ J.

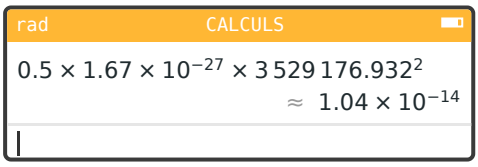
Données utiles $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg ; v_{sortie} (Q.5)

$$E_C = \frac{1}{2}m v_{\text{sortie}}^2 = \frac{1}{2} \times 1{,}67 \times 10^{-27} \times \left(3{,}53 \times 10^{6}\right)^2$$

$E_C = 1{,}04 \times 10^{-14}$ J $\approx 1{,}0 \times 10^{-14}$ J : c'est la valeur attendue.

COMPRENDRE
Avec l'expression de Q.5, $E_C = eU$: le gain d'énergie cinétique à chaque passage est fixé par la tension seule. On calcule avec la valeur non arrondie de la vitesse.

À LA CALCULATRICE



Q.7 Calculer le nombre de tours complets que les particules ont effectués avant la sortie du cyclotron.

Données utiles gain par passage : $E_C = 1{,}0 \times 10^{-14}$ J ; énergie cinétique en sortie : 70 MeV ; $1\ \text{eV} = 1{,}60 \times 10^{-19}$ J

Énergie cinétique finale en joules : $E_{C,f} = 70 \times 10^{6} \times 1{,}60 \times 10^{-19} = 1{,}12 \times 10^{-11}$ J

L'ion part sans vitesse et ne gagne de l'énergie qu'entre les plaques. Nombre de passages dans la zone accélératrice :

$$n = \frac{E_{C,f}}{E_C} = \frac{1{,}12 \times 10^{-11}}{1{,}0 \times 10^{-14}} = 1{,}12 \times 10^{3}$$

D'après la figure 1, l'ion traverse deux fois l'espace entre les cavités à chaque tour : le nombre de tours est $\frac{n}{2}$.

Environ 560 tours, soit $5{,}6 \times 10^{2}$ tours complets.

PIÈGE
Répondre 1120 : c'est le nombre de passages entre les plaques, pas le nombre de tours. Ne pas oublier non plus le préfixe méga, 10^6.

MÉTHODE
Question ouverte : annoncer la démarche en une phrase, convertir dans une unité commune, calculer, puis relier le résultat à ce qui est demandé à l'aide du schéma.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$70 \times 10^{6} \times 1.60 \times 10^{-19} \approx 1.12 \times 10^{-11}$

$\dfrac{1.12 \times 10^{-11}}{1.0 \times 10^{-14}} \approx 1120$

$\dfrac{1120}{2} \approx 560$

Q.8 Écrire l'équation de la réaction nucléaire conduisant à la formation du fluor 18.

Données utiles oxygène : $Z = 8$; fluor : $Z = 9$; proton ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$; neutron ${}^{1}_{0}\mathrm{n}$

Un proton frappe un noyau d'oxygène 18 ; il se forme un noyau de fluor 18 et un neutron.

$$ {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{18}_{8}\mathrm{O} \longrightarrow {}^{18}_{9}\mathrm{F} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} $$

COMPRENDRE
Vérification par les lois de conservation : nombre de masse $1 + 18 = 18 + 1$; nombre de charge $1 + 8 = 9 + 0$.

Q.9 Donner le nom et le symbole de la particule émise lors d'une désintégration β^{+}, puis écrire l'équation de cette désintégration pour le fluor 18.

Une désintégration β^{+} émet un **positon**, noté ${}^{0}_{1}\mathrm{e}$.

On note ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ le noyau fils. Les nombres de masse se conservent : $A = 18 - 0 = 18$. Les nombres de charge aussi : $Z = 9 - 1 = 8$, numéro atomique de l'oxygène.

$$ {}^{18}_{9}\mathrm{F} \longrightarrow {}^{18}_{8}\mathrm{O} + {}^{0}_{1}\mathrm{e} $$

PIÈGE
Confondre avec la radioactivité β^{-}, qui émet un électron ${}^{0}_{-1}\mathrm{e}$: le noyau fils aurait alors $Z = 10$.

Q.10 Calculer la longueur d'onde correspondant à l'énergie moyenne du photon, puis justifier l'utilisation d'une gamma-caméra.

Données utiles $E = 511$ keV ; $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J · s ; $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m · s^{-1} ; $1\ \mathrm{eV} = 1{,}60 \times 10^{-19}$ J

$E = \dfrac{h\,c}{\lambda}$ donc $\lambda = \dfrac{h\,c}{E}$, avec E en joules :

$$ \lambda = \frac{6{,}63 \times 10^{-34} \times 3{,}00 \times 10^{8}}{511 \times 10^{3} \times 1{,}60 \times 10^{-19}} = 2{,}43 \times 10^{-12}\ \mathrm{m} $$

Sur l'axe des domaines, cette longueur d'onde, proche de 1 pm, se situe dans la zone des rayons γ.

$\lambda = 2{,}43$ pm : le rayonnement émis est un rayonnement γ, d'où l'emploi d'une caméra sensible à ces rayons.

PIÈGE
Laisser l'énergie en keV : $511\ \mathrm{keV} = 511 \times 10^{3} \times 1{,}60 \times 10^{-19}$ J. À la calculatrice, mettre le dénominateur entre parenthèses.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{6.63 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^{8}}{511 \times 10^{3} \times 1.60 \times 10^{-19}} \approx 2.43273 \times 10^{-12}$

Q.11 Montrer que $N(t) = N_0 \times \mathrm{e}^{-\lambda \times t}$ est solution de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda \times N(t)$.

On dérive l'expression proposée :

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = N_0 \times (-\lambda)\,\mathrm{e}^{-\lambda t} = -\lambda \times \left(N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)$$

On reconnaît $N(t)$ dans la parenthèse.

$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda\, N(t)$: l'expression vérifie l'équation différentielle (et $N(0) = N_0$).

MÉTHODE
Pour « montrer qu'une expression est solution », on ne résout pas l'équation : on dérive l'expression, puis on compare les deux membres.

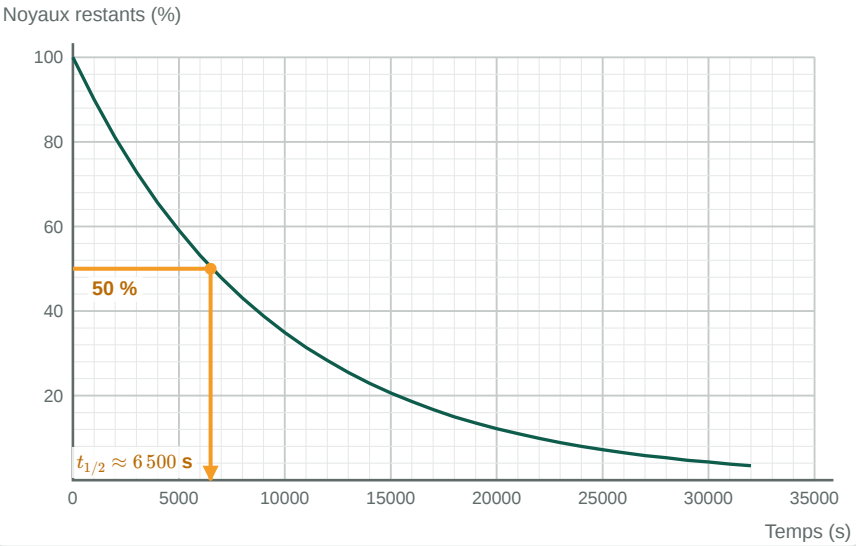
Q.12 Définir puis déterminer graphiquement le temps de demi-vie $t_{1/2}$ du fluor 18.

Le temps de demi-vie est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents s'est désintégrée : $N(t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$.

Sur le graphique, on part de l'ordonnée 50 % ; l'abscisse du point correspondant de la courbe donne $t_{1/2}$.

$t_{1/2} \approx 6{,}5 \times 10^3$ s

COMPRENDRE
Sur l'axe des temps, une petite graduation vaut 1000 s : la lecture se fait à quelques centaines de secondes près, deux chiffres significatifs suffisent. Cela représente environ 1 h 50 min.



Q.12 · Courbe du sujet : lecture du temps de demi-vie

Q.13 Calculer la valeur de la constante radioactive λ du fluor 18.

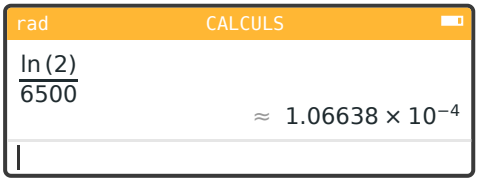
Données utiles $t_{1/2} = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$; $t_{1/2} \approx 6{,}5 \times 10^3$ s (Q.12)

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} = \frac{\ln(2)}{6{,}5 \times 10^3}$$

$\lambda = 1{,}1 \times 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$

PIÈGE
Oublier l'unité : λ est l'inverse d'un temps, en s^{-1} puisque $t_{1/2}$ est en secondes.

À LA CALCULATRICE



Q.14 Déterminer le pourcentage de traceur radioactif restant dans le corps du patient après l'analyse des clichés.

Données utiles attente d'environ 1 h après l'injection, puis environ 30 min pour les clichés et leur analyse

Durée écoulée depuis l'injection : $t = 1\text{ h} + 30\text{ min} = 90 \times 60 = 5\,400\text{ s}$.

Lecture graphique : à l'abscisse 5 400 s, l'ordonnée de la courbe est proche de 57 %.

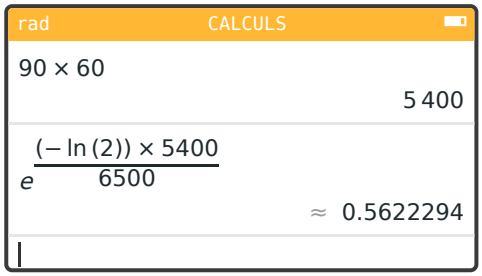
Vérification par le calcul : $\dfrac{N(t)}{N_0} = \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-\ln(2)\times 5400/6500} = 0{,}56$, résultat compatible avec la lecture.

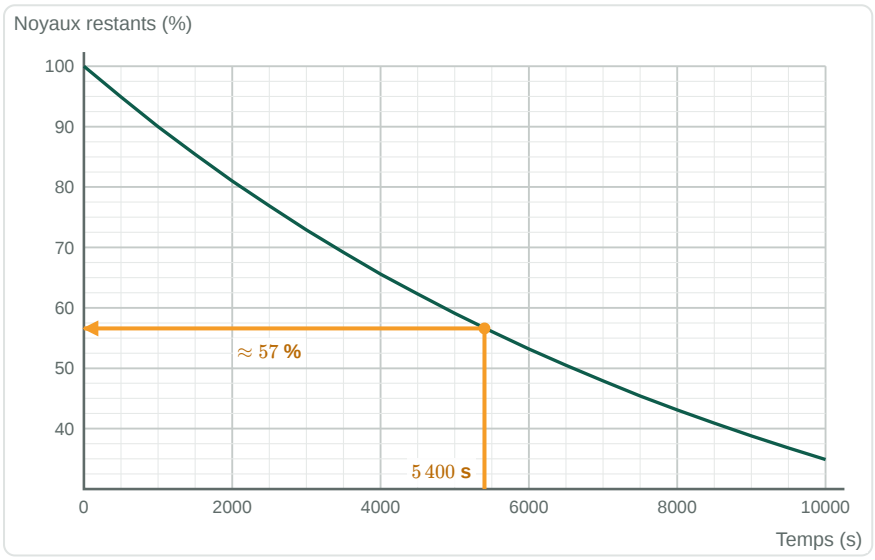
Il reste environ $57\ \%$ du traceur radioactif à la fin de l'analyse des clichés.

PIÈGE

Prendre 2 h, la sortie de l'hôpital, ou seulement 30 min : l'analyse des clichés s'achève 1 h 30 min après l'injection, origine des dates.

À LA CALCULATRICE





Q.14 · Courbe du sujet (agrandie) : lecture à la fin de l'analyse des clichés

Q.15 Calculer la durée nécessaire pour qu'il reste moins de 1 % de traceur radioactif dans le corps du patient. Commenter cette valeur.

Données utiles $t_{1/2} \approx 6{,}5 \times 10^3$ s (Q.12) ; $\lambda = \dfrac{\ln(2)}{t_{1/2}}$ (Q.13)

On cherche t tel que $\dfrac{N(t)}{N_0} < 0{,}01$, soit $\mathrm{e}^{-\lambda t} < 0{,}01$.

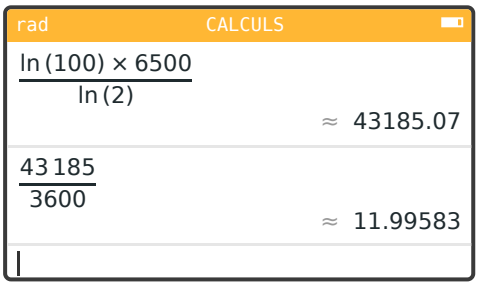
La fonction $\ln$ est croissante : $-\lambda t < \ln(0{,}01)$, soit $\lambda t > \ln(100)$, d'où

$$t > \frac{\ln(100)}{\lambda} = \frac{\ln(100)}{\ln(2)} \times t_{1/2} = \frac{\ln(100)}{\ln(2)} \times 6{,}5 \times 10^3 = 4{,}3 \times 10^4 \text{ s}$$

Commentaire : le patient quitte l'hôpital 2 h après l'injection, alors que près de la moitié du traceur est encore présente. La radioactivité devient toutefois très faible en une demi-journée : l'exposition du patient et de son entourage reste brève.

$t \approx 4{,}3 \times 10^4$ s, soit environ 12 h.

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
En divisant par $-\lambda$, nombre négatif, le sens de l'inégalité change. Calculer avec λ arrondi à $1{,}1 \times 10^{-4}$ s^{-1} donne $4{,}2 \times 10^4$ s : garder la valeur non arrondie.

COMPRENDRE
1 % correspond à un peu moins de 7 demi-vies, car $2^7 = 128$. Le graphique s'arrête vers 32 000 s, où il reste encore plus de 3 % : la lecture graphique est impossible, le calcul s'impose.