Paiement sans contact

Bac 2025 Asie Jour 2 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

Q1 Exprimer l'intensité $i(t)$ du courant en fonction de la tension u_C aux bornes du condensateur et de sa capacité C.

L'intensité est le débit de charge sur l'armature du condensateur : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

Or la charge portée par l'armature est $q = C\,u_C$, avec C constante, donc :

$$i(t) = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

PIÈGE

Écrire $i = C\,u_C$ ou $i = \dfrac{u_C}{C}$. L'intensité dépend de la variation de u_C, pas de sa valeur : quand le condensateur est chargé, $u_C = E$ et pourtant $i = 0$.

Q2 Montrer que la tension u_C vérifie $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$ et exprimer τ en fonction de R et de C.

Données utiles $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (Q1)

Interrupteur fermé, la loi des mailles donne : $E = u_R + u_C$.

Loi d'Ohm pour le conducteur ohmique : $u_R = R\,i = R\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (Q1).

On a donc $R\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$, puis, en divisant chaque terme par $R\,C$:

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{R\,C} = \frac{E}{R\,C}$$

C'est l'équation attendue, avec $\tau = R\,C$.

MÉTHODE

Toujours le même enchaînement pour un circuit RC : loi des mailles, loi d'Ohm, relation $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, puis division pour que le coefficient de la dérivée soit égal à 1.

Q3 Vérifier que l'unité de τ est la seconde.

Loi d'Ohm : $R = \dfrac{u_R}{i}$, donc R s'exprime en $\mathrm{V \cdot A^{-1}}$.

Relation de Q1 : $C = \dfrac{i}{\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t}$, donc C s'exprime en $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{V \cdot s^{-1}}} = \mathrm{A \cdot s \cdot V^{-1}}$.

Unité du produit $R\,C$: $\mathrm{V \cdot A^{-1} \times A \cdot s \cdot V^{-1}} = \mathrm{s}$.

$\tau = R\,C$ s'exprime bien en seconde.

COMPRENDRE

Autre voie, plus rapide : dans l'équation différentielle, les termes $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{u_C}{\tau}$ s'additionnent, donc ont la même unité, $\mathrm{V \cdot s^{-1}}$. Comme u_C est en volt, τ est en seconde.

Q4 Vérifier que $u_C = E\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$ est solution de l'équation différentielle.

On écrit $u_C = E - E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ et on dérive :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -E \times \left(-\frac{1}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} = \frac{E}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

On reporte dans le membre de gauche de l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{\tau} - \frac{E}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = \frac{E}{\tau}$$

On retrouve le second membre $\dfrac{E}{\tau}$ à tout instant : la fonction proposée est bien solution.

PIÈGE

Oublier le facteur $-\dfrac{1}{\tau}$ en dérivant l'exponentielle, ou le signe : la dérivée de $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ est $-\dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

COMPRENDRE

Cette solution respecte aussi la condition initiale : à $t = 0$, $u_C = E\,(1 - 1) = 0$, le condensateur est déchargé, comme sur la courbe de l'annexe.

Q5 Déterminer, en explicitant la démarche, la valeur de la constante de temps τ à partir de la courbe de l'annexe.

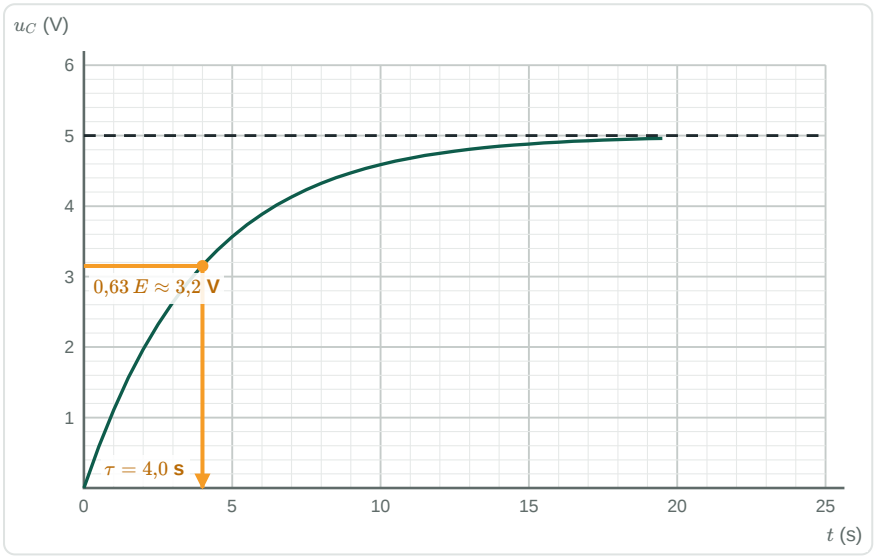
Données utiles $E = 5{,}0$ V ; courbe $u_C(t)$ de l'annexe

À l'instant $t = \tau$, la solution de Q4 donne $u_C(\tau) = E\,(1 - \mathrm{e}^{-1}) = 0{,}63\,E$.

$u_C(\tau) = 0{,}63 \times 5{,}0 = 3{,}2$ V

Sur l'annexe, on trace l'horizontale d'ordonnée 3,2 V jusqu'à la courbe, puis on lit l'abscisse du point d'intersection.

$\tau = 4{,}0$ s

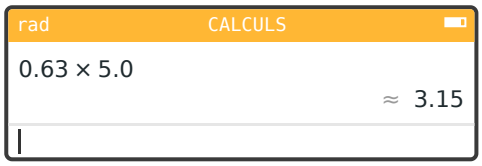


Q5 · Annexe complétée : lecture de τ à 63 % de la tension finale

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme E, et la lecture graphique ne permet pas mieux. Le calcul confirme la lecture : $\tau = RC = 100 \times 10^3 \times 40 \times 10^{-6} = 4{,}0$ s.

MÉTHODE
Autre démarche acceptée : tracer la tangente à la courbe à l'origine ; elle coupe l'asymptote $u_C = E$ à l'instant $t = \tau$. Elle est moins précise, car la tangente est délicate à tracer.

À LA CALCULATRICE



Q6 Indiquer, en justifiant, si le circuit réalisé modélise correctement le circuit de la puce d'une carte bancaire lors d'un paiement sans contact.

Données utiles $\tau = 4{,}0$ s (Q5) ; temps de réponse $t_r = \tau$; temps de réponse attendu : de 1 à 2 s

Le temps de réponse du circuit réalisé est $t_r = \tau = 4{,}0$ s.

Or le temps de réponse d'une puce doit être compris entre 1 s et 2 s : ici il est au moins deux fois trop long.

$t_r = 4{,}0$ s > 2 s : le circuit réalisé ne modélise pas correctement la puce d'une carte bancaire.

COMPRENDRE
Comme $\tau = RC$, il suffirait de diviser R ou C par un nombre compris entre 2 et 4 pour ramener le temps de réponse entre 1 s et 2 s.