EXERCICE 2 La yaourtière (5,5 points)

La préparation de yaourt « maison » à partir de lait est une pratique de plus en plus courante. Cette préparation repose sur une prise en masse progressive du lait sous l'action de ferments lactiques pendant environ 8 heures, à la température de 43 °C, qui est maintenue automatiquement dans la yaourtière. Il faut encore attendre 2 heures pour que les yaourts ainsi préparés refroidissent, à l'air libre puis au réfrigérateur.



Un exemple de yaourtière

Les objectifs de cet exercice sont d'étudier quelques aspects de la fabrication d'un yaourt maison, d'estimer son coût puis de modéliser l'étape finale de refroidissement des yaourts dans le réfrigérateur.

1. Fabrication des yaourts dans la yaourtière

Certains ferments lactiques utilisés pour la fabrication des yaourts maison contiennent des bactéries alimentaires qui présentent un optimum de croissance à la température de 43 °C.

La yaourtière utilisée permet la préparation de 7 yaourts. On utilise la recette suivante :

- verser 700 mL de lait à la température ambiante dans un récipient ;
- ajouter un sachet de 2 g de ferments lactiques puis mélanger ;
- répartir la préparation dans les 7 pots en verre de la yaourtière et les fermer à l'aide d'un couvercle ;
- phase de chauffage : mettre les 7 pots dans la yaourtière, fermer la yaourtière, la démarrer et la faire fonctionner pendant 8 heures ;
- phase de refroidissement : laisser refroidir les pots puis les mettre au réfrigérateur pendant 2 heures.

Afin d'effectuer des bilans d'énergie, on définit le système étudié, noté {S}, constitué de la yaourtière contenant les 7 pots en verre fermés et remplis. On admet que tous les composants du système {S} sont à la même température.

Lors de la phase de chauffage de 8 heures, il est possible de distinguer deux étapes :

- étape A : chauffage du système {S} de la température ambiante à la température de 43 °C pendant une durée Δt_A ;
- étape B : maintien en continu du système {S} à la température de 43 °C pendant une durée Δt_B.

Données :

- conversion d'une énergie en wattheure (Wh) en une énergie en joule (J) : 1 kWh = 3 600 kJ;
- puissance électrique moyenne consommée par la yaourtière durant l'étape A : P_A = 150 W;
- puissance électrique moyenne consommée par la yaourtière durant l'étape B : P_B = 20 W ;
- estimation de la capacité thermique du système {S} : $C = 4{,}0\times10^{3}$ J·K^{-1} ;
- température de fabrication d'un yaourt : θ_{fab} = 43 °C ;
- température de l'air ambiant : θ_{amb} = 20 °C.

Q1. Montrer que la valeur de l'énergie thermique $Q_{chauffage}$ qui doit être transférée au système {S} lors de l'étape A est voisine de $9{,}2\times10^{4}$ J.

Q2. Calculer la durée Δt_A de l'étape A, en supposant que, pendant cette étape, 85 % de l'énergie électrique consommée par la yaourtière est fournie par transfert thermique au système {S}. En déduire que la durée Δt_B de l'étape B est de l'ordre de 7 heures et 50 minutes.

Un des arguments souvent avancés qui encouragent à faire ses yaourts soi-même est le prix : à qualité égale, ils coûteraient moins cher que ceux achetés directement dans la grande distribution.

On donne des coûts approximatifs ci-dessous :

1 kWh électrique	1 L de lait	2 g de ferments lactiques	1 pot de yaourt nature de grande distribution et de qualité comparable à celui fait maison
0,20 €	1,05 €	0,64 €	0,35 €

Q3. Estimer le prix de fabrication d'un yaourt fait maison. Discuter si l'argument lié au coût des yaourts maison est vérifié.

2. Refroidissement des yaourts dans le réfrigérateur

Dans cette partie, on étudie le refroidissement d'un seul pot de yaourt.

Après avoir passé 8 h dans la yaourtière, le pot de yaourt, avec son couvercle, est d'abord refroidi à l'air jusqu'à atteindre la température de 30 °C. On étudie dans cette partie la seconde phase de refroidissement à partir de l'instant initial où le pot de yaourt est placé dans le réfrigérateur.

Le système d'étude est noté {P} ; il comprend le pot en verre, le couvercle et le yaourt qu'il contient. On admet que tous ses composants sont à la même température.

Données :

- loi de Newton donnant l'expression du flux thermique Φ, en watt, cédé par le système {P} de température θ, en contact avec l'air intérieur du réfrigérateur de température $\theta_{réfri}$:

$$\Phi = h \cdot S \cdot (\theta - \theta_{réfri})$$

avec :

- h, coefficient de transfert thermique surfacique : $h = 10\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$;
- S, surface d'échange entre l'air de l'intérieur du réfrigérateur et le système {P} : $S = 0{,}019\ \text{m}^2$.

- masse du système {P} : $m = 0{,}19$ kg ;
- température, considérée constante, de l'intérieur du réfrigérateur : $\theta_{réfri} = 4{,}0$ °C ;
- température initiale du système {P} : $\theta_0 = 30$ °C ;
- capacité thermique massique du système {P} : $c_Y = 2{,}5\times10^3\ \text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

Q4. Nommer les trois modes de transfert thermique permettant le refroidissement du système {P}.

Q5. Calculer la valeur du flux thermique initial Φ_0 cédé par le système {P} à l'instant initial $t = 0$ et indiquer, en justifiant, comment varie le flux thermique au cours du temps.

Q6. Indiquer la température du système {P} après un temps très long. Montrer que la valeur de l'énergie thermique perdue par le système {P} durant la phase de refroidissement est voisine de 12 kJ.

Q7. Calculer la durée Δt_0 qui serait nécessaire pour effectuer un transfert thermique de 12 kJ à la puissance Φ_0.

En tenant compte de la variation du flux thermique au cours du temps, on montre que l'évolution de la température du système {P} peut être modélisée par la fonction :

$$\theta(t) = (\theta_0 - \theta_{\text{réfri}})e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{\text{réfri}} \qquad \text{où } \tau = \frac{m \cdot c_Y}{h \cdot S}$$

Q8. Tracer l'allure de l'évolution de la température θ en fonction du temps en indiquant les températures initiale et finale ; faire apparaître une méthode graphique de détermination du temps caractéristique τ.

Q9. Comparer la valeur de τ à celle de Δt_0 obtenue en **Q7.** Commenter.