Corrigé complet — Bac S 2011 Amérique du Nord (ancien programme)

Physique-chimie, Bac S (épreuve écrite) **16 points** **3 h 30**

Ex 1	**Hydrolyses des esters** Hydrolyse d'un ester · Chauffage à reflux et catalyse · Constante d'équilibre et taux d'avancement · Hydrolyse basique · Temps de demi-réaction · Facteurs cinétiques	6,5 pts	1 h 18	18 questions	p. 2
Ex 2	**Constante de raideur d'un ressort** Force de rappel d'un ressort · Première loi de Newton · Oscillateur élastique · Période propre · Exploitation d'une droite passant par l'origine · Précision d'une mesure de durée	4 pts	52 min	9 questions	p. 8
Ex 3	**Spécialité : Réalisation d'une modulation d'amplitude** Modulation d'amplitude · Multiplieur · Lecture d'un oscillogramme · Période et fréquence · Taux de modulation · Longueur d'onde	4 pts	52 min	13 questions	p. 12
Ex 4	**Matière et antimatière** Équivalence masse-énergie · Équation de réaction nucléaire · Lois de conservation · Radioactivité β+ · Activité et décroissance radioactive · Demi-vie	5,5 pts	1 h 05	15 questions	p. 18

Comment s'en servir. Fais d'abord le sujet en temps limité, puis corrige-toi exercice par exercice. À gauche de chaque question, sur les carreaux : ce qu'il faut écrire sur ta copie. À droite : les pièges, ce qu'il faut comprendre et les méthodes.

Hydrolyses des esters

Bac S 2011 Amérique du Nord (ancien programme) · Exercice 1 **6,5 points** **Durée conseillée 1 h 18**

1.1.1 Écrire, avec les formules semi-développées, l'équation de la réaction d'hydrolyse de l'éthanoate de benzyle. Nommer les produits formés.

L'hydrolyse coupe l'ester en un acide carboxylique et un alcool :

$$CH_3-COO-CH_2-C_6H_5 + H_2O \rightleftharpoons CH_3-COOH + C_6H_5-CH_2-OH$$

Produits : l'**acide éthanoïque** CH_3-COOH et l'**alcool benzylique** $C_6H_5-CH_2-OH$.

MÉTHODE
Dans le nom d'un ester, « éthanoate » désigne la partie venue de l'acide (acide éthanoïque) et « de benzyle » la partie venue de l'alcool (alcool benzylique, donné dans l'énoncé).

1.1.2 Donner deux caractéristiques de cette réaction.

L'hydrolyse d'un ester est une réaction **lente** et **limitée** (non totale : elle aboutit à un état d'équilibre).

COMPRENDRE
Elle est limitée par la réaction inverse, l'estérification : l'acide et l'alcool formés redonnent de l'ester et de l'eau. Dans l'état final, les quatre espèces coexistent.

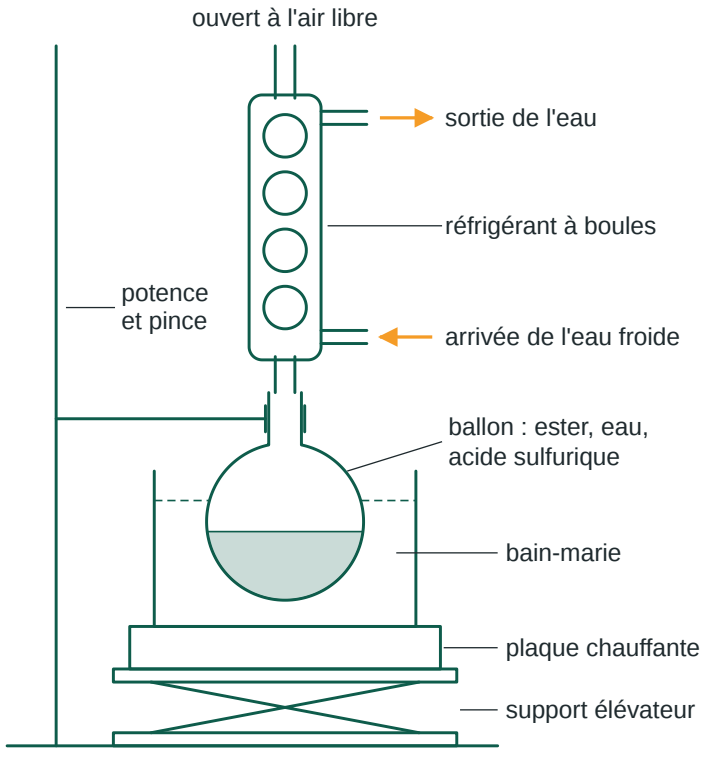
1.2.1 Schématiser le montage utilisé. Quel est l'intérêt de ce montage ?

Le montage est un chauffage à reflux (schéma ci-dessous).

Chauffer accélère la réaction, car la température est un facteur cinétique. Les vapeurs qui s'élèvent se condensent dans le réfrigérant et retombent dans le ballon.

Le chauffage à reflux accélère la réaction **sans perte de matière**.

PIÈGE
Sur le schéma, l'eau entre par le bas du réfrigérant et sort par le haut, et le sommet du réfrigérant reste ouvert : un montage bouché serait dangereux (surpression).



1.2.1 · Montage de chauffage à reflux

1.2.2 Quel est le rôle de l'acide sulfurique ?

L'acide sulfurique est un **catalyseur** : il augmente la vitesse de la réaction sans figurer dans son équation.

COMPRENDRE
Un catalyseur ne modifie pas l'état final : l'équilibre est atteint plus vite, mais le rendement reste le même.

1.3.1 Compléter littéralement le tableau d'avancement de l'annexe I.

Les deux réactifs sont introduits en même quantité n_0 et tous les nombres stœchiométriques valent 1.

Dans l'état final : $n_0 - x_f$ pour l'ester et pour l'eau, x_f pour l'acide et pour l'alcool.

Équation chimique		Ester + H_2O = CH_3COOH + $C_6H_5CH_2OH$			
État du système	Avancement (mol)	Quantités de matière (mol)			
État initial	0	n_0	n_0	0	0
État intermédiaire	x	$n_0 - x$	$n_0 - x$	x	x
État final	x_f	$n_0 - x_f$	$n_0 - x_f$	x_f	x_f

1.3.1 · Annexe I complétée (ce que l'élève écrit est en orange)

1.3.2 Définir le taux d'avancement τ de la réaction.

Le taux d'avancement final est le quotient de l'avancement final par l'avancement maximal : $\tau = \dfrac{x_f}{x_{max}}$.

Si la réaction était totale, les réactifs seraient entièrement consommés : $n_0 - x_{max} = 0$, donc $x_{max} = n_0$.

$$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{x_f}{n_0}$$

1.3.3 Donner l'expression de la constante d'équilibre K. Montrer que $K = \dfrac{\tau^2}{(1-\tau)^2}$.

À l'équilibre, en notant V le volume du mélange :

$$K = \frac{[CH_3COOH]_f\,[C_6H_5CH_2OH]_f}{[\text{ester}]_f\,[H_2O]_f} = \frac{\frac{x_f}{V}\times\frac{x_f}{V}}{\frac{n_0-x_f}{V}\times\frac{n_0-x_f}{V}} = \frac{x_f^2}{(n_0-x_f)^2}$$

Or $x_f = \tau\, n_0$ (1.3.2) :

$$K = \frac{\tau^2 n_0^2}{(n_0 - \tau\, n_0)^2} = \frac{\tau^2 n_0^2}{n_0^2\,(1-\tau)^2}$$

$$K = \frac{\tau^2}{(1-\tau)^2}$$

PIÈGE
Ici l'eau est un réactif introduit en quantité n_0, pas le solvant : sa concentration figure dans K. L'oublier donne une expression fausse.

1.3.4 Vérifier que le rendement de la réaction est pratiquement égal à 33 %.

Données utiles $K = 0{,}25$; $K = \dfrac{\tau^2}{(1-\tau)^2}$ (1.3.3)

τ et $1-\tau$ sont positifs, on prend la racine carrée : $\sqrt{K} = \dfrac{\tau}{1-\tau}$, soit $\sqrt{K} - \sqrt{K}\,\tau = \tau$, d'où

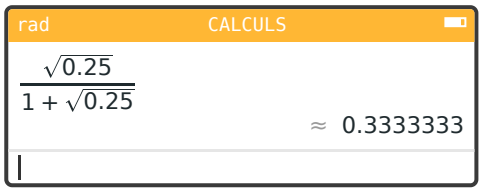
$$\tau = \frac{\sqrt{K}}{1+\sqrt{K}} = \frac{\sqrt{0{,}25}}{1+\sqrt{0{,}25}} = \frac{0{,}50}{1{,}50} = 0{,}33$$

Le rendement est le quotient de la quantité d'acide (ou d'alcool) obtenue par la quantité maximale attendue : $\dfrac{x_f}{x_{max}} = \tau$.

Rendement $= \tau = 0{,}33$, soit $33\ \%$: valeur attendue retrouvée.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme $K = 0{,}25$. Un mélange équimolaire d'ester et d'eau ne s'hydrolyse qu'au tiers : c'est pour cela qu'on cherche à déplacer l'équilibre (question 1.4).

À LA CALCULATRICE



1.4 Comment évolue le rendement de la réaction lorsqu'on extrait l'alcool du milieu réactionnel ?

Retirer l'alcool diminue sa concentration, donc le quotient de réaction $Q_r = \dfrac{[\text{acide}]\,[\text{alcool}]}{[\text{ester}]\,[\text{eau}]}$ devient inférieur à K.

Le système évolue alors dans le sens direct, celui de l'hydrolyse : il se forme davantage de produits et x_f augmente.

Extraire l'alcool **augmente le rendement** de l'hydrolyse.

MÉTHODE
Pour prévoir un sens d'évolution, comparer Q_r à K : si $Q_r < K$, sens direct ; si $Q_r > K$, sens inverse. Éliminer un produit ou mettre un réactif en excès améliore le rendement.

2.1 En exploitant le texte, donner l'intérêt d'une hydrolyse en milieu basique.

D'après le texte, l'ion carboxylate formé ne réagit pas avec l'alcool : la réaction inverse (estérification) n'a pas lieu.

L'hydrolyse basique est **totale** : tout l'ester est consommé, alors que l'hydrolyse par l'eau est limitée (33 % ici).

2.2.1 Écrire la relation entre $n(\text{HO}^-)_{restant}$ et l'avancement x de la réaction à la date t.

Données utiles tableau de l'annexe : $n(\text{HO}^-)_{restant} = 10 \times 10^{-3}$ mol à $t = 0$

Équation :
$\text{CH}_3\text{–COO–CH}_2\text{–C}_6\text{H}_5 + \text{HO}^- \longrightarrow \text{CH}_3\text{–COO}^- + \text{C}_6\text{H}_5\text{–CH}_2\text{–OH}$

Un ion hydroxyde est consommé chaque fois que la réaction avance d'une mole. En notant $n_i(\text{HO}^-)$ la quantité initiale :

$n(\text{HO}^-)_{restant} = n_i(\text{HO}^-) - x$, avec $n_i(\text{HO}^-) = 10 \times 10^{-3}$ mol

COMPRENDRE
Les quantités du tableau sont celles d'un prélèvement de 20,0 mL, puisque ce sont les prélèvements qui sont dosés. L'avancement x est donc lui aussi rapporté à 20,0 mL.

2.2.2 En déduire les valeurs manquantes de x dans le tableau de l'annexe I, aux dates $t = 4$ min et $t = 6$ min.

Données utiles $n(\text{HO}^-)_{restant} = 7{,}3 \times 10^{-3}$ mol à 4 min et $5{,}8 \times 10^{-3}$ mol à 6 min ; relation de la question 2.2.1

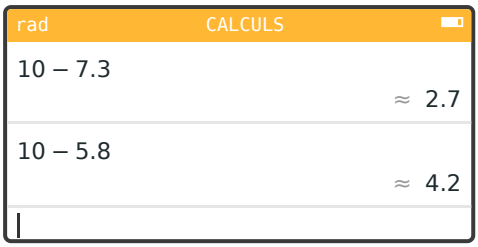
$x = n_i(\text{HO}^-) - n(\text{HO}^-)_{restant}$

À $t = 4$ min : $x = 10 \times 10^{-3} - 7{,}3 \times 10^{-3} = 2{,}7 \times 10^{-3}$ mol

À $t = 6$ min : $x = 10 \times 10^{-3} - 5{,}8 \times 10^{-3} = 4{,}2 \times 10^{-3}$ mol

Dans le tableau (en 10^{-3} mol) : $x(4\text{ min}) = 2{,}7$ et $x(6\text{ min}) = 4{,}2$

À LA CALCULATRICE



2.2.3 Déterminer la valeur finale x_f de l'avancement, sachant que la masse d'éthanoate de benzyle utilisée pour le mélange réactionnel est égale à 10,0 g.

Données utiles $m = 10{,}0$ g d'ester dans $V = 200$ mL ; prélèvements de 20,0 mL ; $M = 150\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Un prélèvement de 20,0 mL représente le dixième du mélange : il contient $m' = \dfrac{10{,}0}{10} = 1{,}00$ g d'ester.

Les ions hydroxyde sont en excès et la réaction est totale : l'ester, réactif limitant, est entièrement consommé.

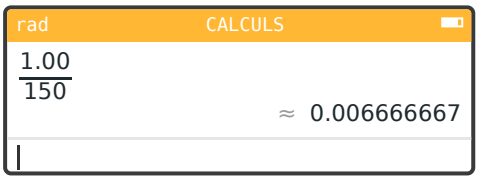
$$x_f = n_i(\text{ester}) = \frac{m'}{M} = \frac{1{,}00}{150} = 6{,}67 \times 10^{-3}\ \text{mol}$$

$x_f = 6{,}67 \times 10^{-3}\ \text{mol} = 6{,}67\ \text{mmol}$

PIÈGE
Calculer $\dfrac{10{,}0}{150} = 66{,}7$ mmol : c'est l'avancement final pour les 200 mL, incompatible avec le tableau, où x ne dépasse pas 6,2 mmol.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme m et M. Vérification : 6,67 mmol reste inférieur aux 10 mmol d'ions hydroxyde, qui sont bien en excès.

À LA CALCULATRICE



2.3.1 Définir le temps de demi-réaction et le déterminer à partir du graphique de l'annexe I.

Données utiles $x_f = 6{,}67$ mmol (2.2.3)

Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle l'avancement atteint la moitié de sa valeur finale : $x(t_{1/2}) = \dfrac{x_f}{2}$.

$\dfrac{x_f}{2} = \dfrac{6{,}67}{2} = 3{,}33$ mmol

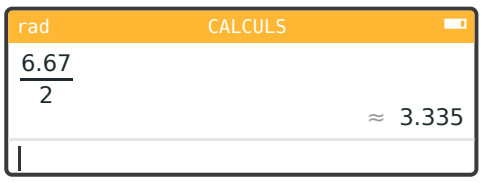
On place les deux points manquants, on trace la courbe qui passe au plus près des points, puis on lit l'abscisse du point d'ordonnée 3,33 mmol.

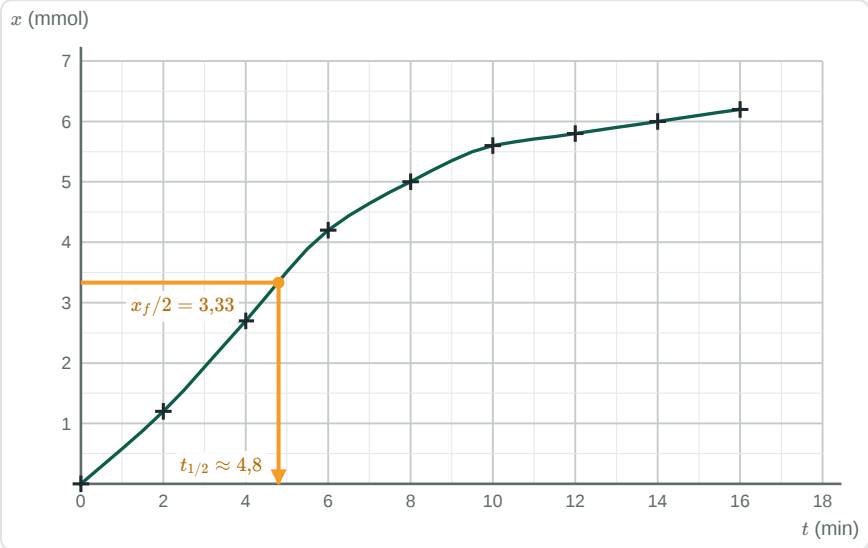
$t_{1/2} \approx 4{,}8$ min

PIÈGE
Prendre la moitié de la dernière valeur du tableau (6,2 mmol) : à 16 min la réaction n'est pas terminée. C'est $x_f = 6{,}67$ mmol qu'il faut diviser par deux.

COMPRENDRE
Une lecture graphique dépend du tracé : toute valeur comprise entre 4,5 et 5 min environ est acceptable si les traits de construction figurent sur l'annexe.

À LA CALCULATRICE





2.3.1 · Annexe I : courbe tracée et lecture de $t_{1/2}$

2.3.2 Comment varie la vitesse de réaction au cours du temps ? Pourquoi ?

La vitesse de réaction est proportionnelle au coefficient directeur de la tangente à la courbe $x = f(t)$. Les tangentes sont de moins en moins inclinées quand t augmente.

La vitesse **diminue** au cours du temps, car les réactifs sont consommés : leur concentration, facteur cinétique, diminue.

COMPRENDRE
Le point à 2 min se situe un peu sous la tendance (pente plus faible au tout début) : c'est une dispersion expérimentale. Au-delà de 6 min, le ralentissement est net.

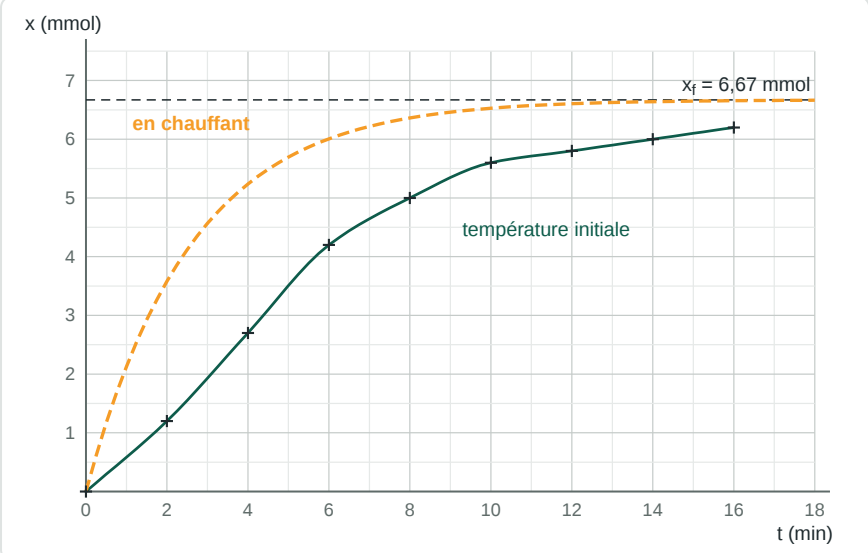
2.3.3 Représenter sur le graphique l'allure de la courbe que l'on obtiendrait en chauffant le mélange réactionnel.

La température est un facteur cinétique : en chauffant, la réaction est plus rapide, donc la courbe monte plus vite (tangente à l'origine plus inclinée, $t_{1/2}$ plus petit).

L'état final ne change pas : la réaction est totale et la quantité d'ester est la même.

La nouvelle courbe passe **au-dessus** de la première et tend vers la **même limite** $x_f = 6{,}67$ mmol.

PIÈGE
Tracer une courbe qui dépasse x_f : chauffer change la durée de la transformation, pas la quantité de produit formé.



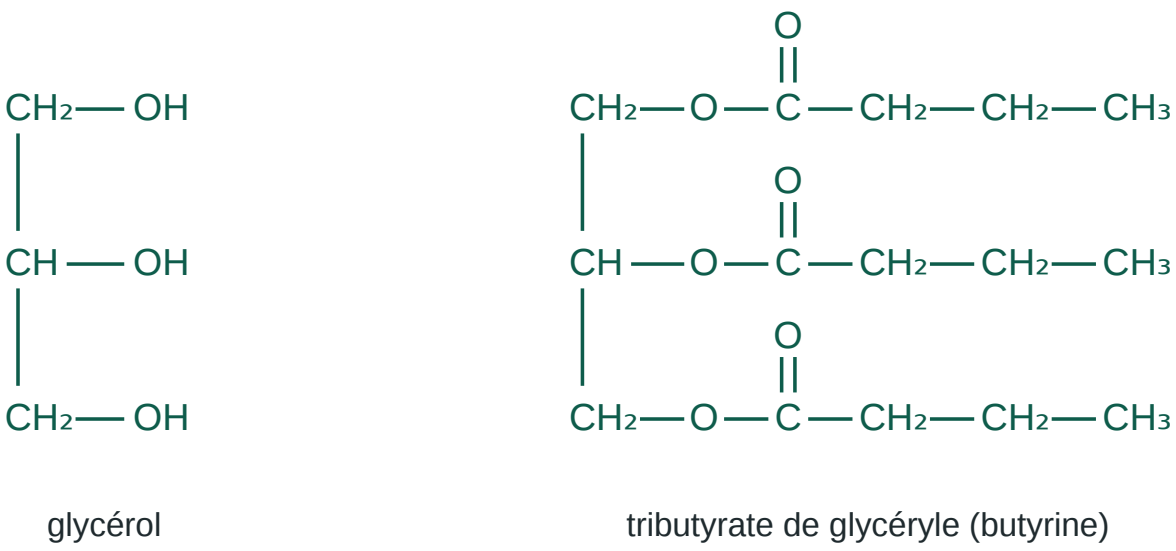
2.3.3 · Annexe I : en orange, l'allure de la courbe obtenue en chauffant

3.1 Écrire la formule semi-développée du glycérol (propan-1,2,3-triol) ainsi que celle du tributyrate de glycéryle.

Le glycérol est une chaîne de trois atomes de carbone portant chacun un groupe hydroxyle.

L'acide butyrique (acide butanoïque) a pour formule $CH_3-CH_2-CH_2-COOH$, donc R désigne $CH_3-CH_2-CH_2-$.
Le tributyrate de glycéryle est le triester du glycérol et de cet acide : chaque groupe $-OH$ est remplacé par $-O-CO-R$.

Glycérol : $CH_2OH-CHOH-CH_2OH$; butyrine : trois groupes $-O-CO-CH_2-CH_2-CH_3$ sur la même chaîne (voir figure).



glycérol — tributyrate de glycéryle (butyrine)

3.1 · Glycérol et tributyrate de glycéryle

3.2 Quel est l'intérêt de l'opération de relargage, qui consiste à ajouter de l'eau salée au mélange réactionnel ?

D'après le texte, le savon (carboxylate de potassium) est moins soluble dans l'eau salée que dans l'eau.

Le relargage fait **précipiter le savon** : il se sépare du mélange et on le récupère par filtration.

COMPRENDRE
Le glycérol et l'excès d'hydroxyde de potassium restent en solution : le relargage sert donc aussi à séparer le savon des autres espèces.

Constante de raideur d'un ressort

Bac S 2011 Amérique du Nord (ancien programme) · Exercice 2 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 Exprimer l'allongement ℓ_0 en fonction de L_0 et de L_e.

L'allongement est la différence entre la longueur du ressort à l'équilibre et sa longueur à vide.

$$\ell_0 = L_e - L_0$$

PIÈGE
Inverser les deux termes : le ressort chargé est plus long qu'à vide, donc $L_e > L_0$ et ℓ_0 doit être positif.

1.2 Établir, en justifiant, la relation entre m, g, k et ℓ_0 à l'équilibre.

Système {solide}, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Forces : le poids $\vec{P} = m\,g\,\vec{i}$, vertical vers le bas ; la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k\,\ell_0\,\vec{i}$, verticale vers le haut puisque le ressort est étiré.

Le solide est immobile : d'après la première loi de Newton (principe d'inertie), $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$.

En projection sur l'axe $(O, \vec{i})$ orienté vers le bas : $m\,g - k\,\ell_0 = 0$.

$$m\,g = k\,\ell_0, \text{ soit } \ell_0 = \frac{g}{k}\,m$$

COMPRENDRE
La force de rappel d'un ressort est proportionnelle à son allongement et s'oppose à la déformation : étiré, le ressort tire le solide vers le haut.

MÉTHODE
Toute étude d'équilibre suit le même plan : système, référentiel galiléen, bilan des forces, première loi de Newton, puis projection sur un axe orienté.

1.3 En utilisant le graphique de la figure 1 de l'annexe, déterminer la valeur de la constante de raideur k du ressort.

Données utiles $g = 9{,}8\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; $\ell_0 = \frac{g}{k}\,m$ (1.2) ; tableau des mesures de ℓ_0

Les points de la figure 1 sont alignés sur une droite passant par l'origine : ℓ_0 est proportionnel à m, soit $\ell_0 = a\,m$, en accord avec la relation de la question 1.2 où $a = \frac{g}{k}$.

Coefficient directeur, calculé entre l'origine et le point de la droite d'abscisse 100×10^{-3} kg :

$$a = \frac{20{,}2 \times 10^{-2} - 0}{100 \times 10^{-3} - 0} = 2{,}02\ \text{m}\cdot\text{kg}^{-1}$$

$$k = \frac{g}{a} = \frac{9{,}8}{2{,}02} = 4{,}85\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$$

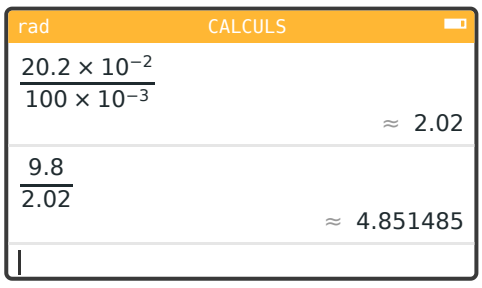
$$k = 4{,}9\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$$

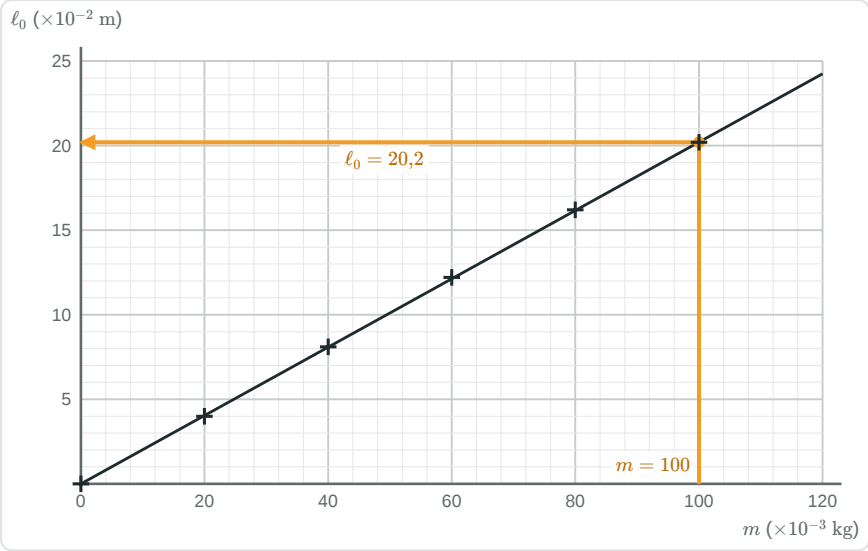
PIÈGE
Les axes sont gradués en 10^{-3} kg et en 10^{-2} m : sans ces puissances de dix, le coefficient directeur est faux d'un facteur 10.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs seulement, comme $g = 9{,}8\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$, la donnée la moins précise. L'unité se vérifie : $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$ divisé par $\text{m}\cdot\text{kg}^{-1}$ donne bien des $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

MÉTHODE
Tracer la droite à la règle au plus près de tous les points, puis choisir pour le calcul deux points de la droite éloignés l'un de l'autre.

À LA CALCULATRICE





1.3 · Figure 1 de l'annexe complétée : droite passant par l'origine

2.1.1 Que représente T_0 dans la solution $x = X_m \cos\left(\dfrac{2\pi t}{T_0}\right)$?

T_0 est la période propre de l'oscillateur : la durée d'une oscillation complète en l'absence d'amortissement.

COMPRENDRE
Le cosinus reprend la même valeur chaque fois que $\dfrac{2\pi t}{T_0}$ augmente de 2π, c'est-à-dire chaque fois que t augmente de T_0.

2.1.2 Montrer que $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Données utiles $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + k\,x = 0$; $x = X_m \cos\left(\dfrac{2\pi t}{T_0}\right)$

On dérive deux fois la solution proposée :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\pi}{T_0} X_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 X_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}\,x$$

On remplace dans l'équation différentielle :

$$-m\,\frac{4\pi^2}{T_0^2}\,x + k\,x = 0 \quad \text{soit} \quad \left(k - \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}\right) x = 0$$

Cette égalité doit être vraie à chaque instant, alors que x n'est pas nul en permanence. Il faut donc $k = \dfrac{4\pi^2 m}{T_0^2}$, d'où $T_0^2 = \dfrac{4\pi^2 m}{k}$.

Une période étant positive :

$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, ce qui est bien la relation attendue.

PIÈGE
Oublier le facteur $\dfrac{2\pi}{T_0}$ qui sort à chaque dérivation : il apparaît deux fois, donc au carré dans la dérivée seconde.

MÉTHODE
Pour vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle : la dériver autant de fois que nécessaire, remplacer, puis chercher la condition qui rend l'égalité vraie à tout instant.

2.2.1 Comment évolue l'amplitude du mouvement au cours du temps ? Comment le justifier ?

L'amplitude des oscillations diminue progressivement au cours du temps.

Le solide est soumis à des forces de frottement, principalement celles de l'air : leur travail est résistant, l'énergie mécanique de l'oscillateur diminue et est dissipée sous forme de chaleur.

L'amplitude décroît à cause des frottements, qui dissipent l'énergie mécanique.

COMPRENDRE
L'énergie mécanique de l'oscillateur est liée au carré de l'amplitude : perdre de l'énergie, c'est osciller de moins en moins loin de la position d'équilibre.

2.2.2 À quelle condition la pseudo-période T est-elle très proche de T_0 ?

$T \approx T_0$ lorsque l'amortissement est faible, c'est-à-dire lorsque les frottements sont peu importants.

COMPRENDRE
C'est le cas ici : le solide oscille dans l'air et l'amplitude ne diminue que lentement d'une oscillation à la suivante.

2.2.3 Comment procéder pour que la mesure de T soit la plus précise possible ?

On chronomètre la durée Δt d'un grand nombre N d'oscillations, par exemple $N = 10$ comme dans le tableau, puis on divise :

$T = \dfrac{\Delta t}{N}$, avec N le plus grand possible.

COMPRENDRE
L'erreur de déclenchement et d'arrêt du chronomètre est la même pour une ou dix oscillations : rapportée à une seule période, elle est divisée par N.

MÉTHODE
Repérer les passages du solide par la position d'équilibre, où il va le plus vite : l'instant de passage y est mieux défini qu'aux positions extrêmes.

2.2.4 Choisir l'une des représentations de la figure 2 de l'annexe pour déterminer la valeur de k, puis la calculer.

Données utiles $T_0^2 = \dfrac{4\pi^2}{k} m$ (2.1.2) ; durées de dix oscillations du tableau

D'après la question 2.1.2, $T_0^2 = \dfrac{4\pi^2}{k} m$: c'est T_0^2 qui est proportionnel à m. On choisit donc la figure 2c, la seule dont les points sont alignés sur une droite passant par l'origine.

Cette droite a pour équation $T_0^2 = a\,m$ avec $a = \dfrac{4\pi^2}{k}$.

Coefficient directeur, entre l'origine et le point de la droite d'abscisse 100×10^{-3} kg, d'ordonnée $0{,}80\ \text{s}^2$:

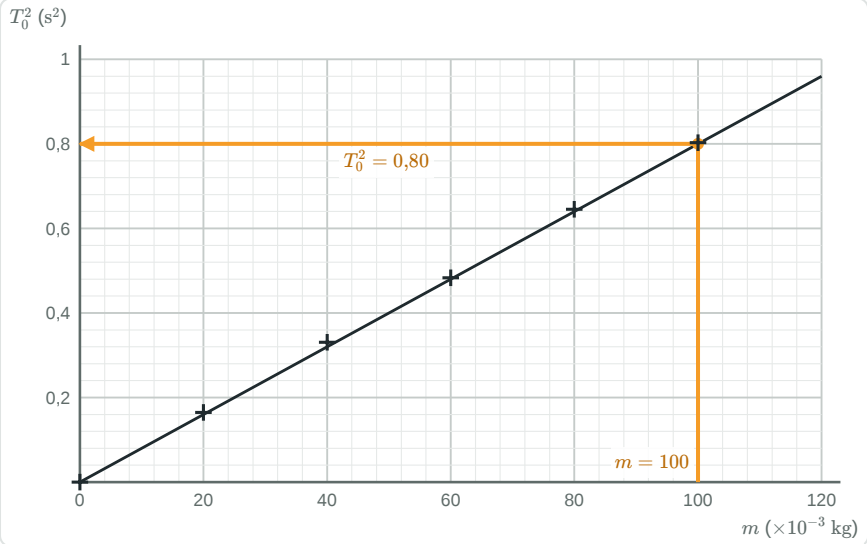
$$a = \frac{0{,}80 - 0}{100 \times 10^{-3} - 0} = 8{,}0\ \text{s}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$k = \frac{4\pi^2}{a} = \frac{4\pi^2}{8{,}0} = 4{,}9\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$k = 4{,}9\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$: la même valeur que par l'étude statique.

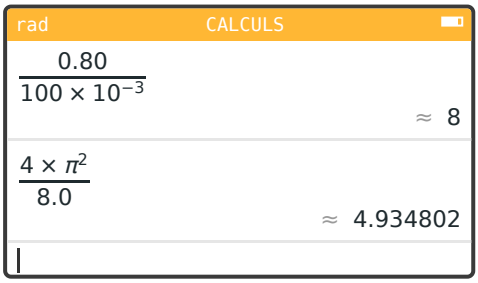
PIÈGE
Choisir la figure 2a parce que T_0 y est porté directement : ses points dessinent une courbe, dont on ne peut pas tirer simplement k.

COMPRENDRE
Le tableau confirme la lecture : pour $m = 100 \times 10^{-3}$ kg, $T_0 = 0{,}896$ s, donc $T_0^2 = 0{,}803\ \text{s}^2$. Deux méthodes indépendantes donnant le même k valident les mesures.



2.2.4 · Figure 2c de l'annexe complétée : droite passant par l'origine

À LA CALCULATRICE



Spécialité : Réalisation d'une modulation d'amplitude

Bac S 2011 Amérique du Nord (ancien programme) · Exercice 3 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 Pourquoi n'est-il pas possible de transmettre une onde sonore sur de grandes distances ?

Une onde sonore est une onde mécanique : elle a besoin d'un milieu matériel et s'y amortit rapidement. Son amplitude devient vite trop faible pour être perçue.

De plus, tous les émetteurs occuperaient la même bande de fréquences (20 Hz à 20 kHz) : leurs signaux se mélangeraient.

Le son s'atténue trop vite dans l'air : sa portée reste très limitée.

COMPRENDRE
La modulation d'amplitude relevait de l'ancien enseignement de spécialité ; elle ne figure plus au programme actuel. Les outils utilisés ici restent exigibles : période, fréquence, lecture d'oscillogramme, relation entre longueur d'onde et fréquence.

1.2 Pourquoi est-il possible d'utiliser une porteuse de grande fréquence ?

Une porteuse de grande fréquence est émise sous forme d'onde électromagnétique : elle se propage à la célérité c, sans support matériel, et reste détectable très loin de l'émetteur.

Sa longueur d'onde $\lambda = \dfrac{c}{f}$ est d'autant plus petite que f est grande : l'antenne, dont la taille est de l'ordre de λ, garde des dimensions réalisables.

Onde électromagnétique de grande portée, captée par une antenne de taille raisonnable.

COMPRENDRE
Chaque station reçoit sa propre fréquence porteuse. Le récepteur sélectionne une station en s'accordant sur cette fréquence : les émissions ne se brouillent pas.

2.1 Compléter le schéma de la figure 1 en ajoutant les deux GBF et les flèches des tensions $u_P(t)$, $u_1(t)$ et $s(t)$.

Chaque tension d'entrée du multiplieur est appliquée entre une entrée et la masse :

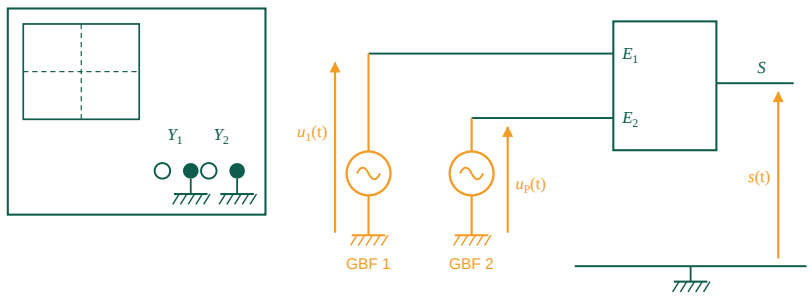
- le GBF 1 est branché entre E_1 et la masse : il délivre le signal modulant $u_1(t)$;
- le GBF 2 est branché entre E_2 et la masse : il délivre la porteuse $u_P(t)$;
- le signal modulé $s(t)$ est la tension entre la sortie S et la masse.

Chaque flèche part de la masse et pointe vers la borne concernée.

Voir la figure 1 complétée : $u_1(t)$ sur E_1, $u_P(t)$ sur E_2, $s(t)$ en sortie.

PIÈGE
Une flèche tension se dessine à côté du dipôle, entre ses deux bornes, la pointe du côté de l'entrée. Une flèche tracée sur un fil représenterait un courant.

COMPRENDRE
Les deux entrées jouent le même rôle, puisque $s = k\,u_1\,u_P$: on peut échanger les deux GBF. Toutes les masses dessinées forment un seul et même point de référence.



2.1 · Figure 1 complétée : les deux GBF et les trois tensions (en orange)

2.2 Sur le même schéma, représenter les fils de connexion à l'oscilloscope permettant de visualiser $u_1(t)$ sur la voie 1 et $u_P(t)$ sur la voie 2.

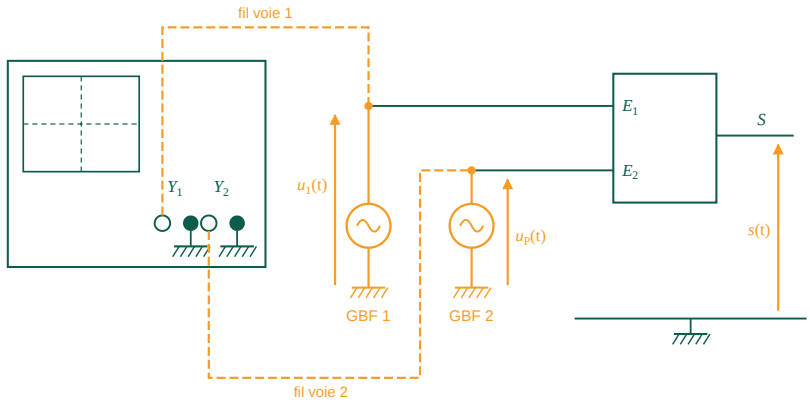
Un fil relie la borne d'entrée de la voie Y_1 à l'entrée E_1 (borne du GBF 1 qui n'est pas à la masse) : la voie 1 affiche $u_1(t)$.

Un second fil relie la borne d'entrée de la voie Y_2 à l'entrée E_2 : la voie 2 affiche $u_P(t)$.

Les bornes noires de l'oscilloscope sont déjà à la masse, commune avec celle du montage.

Y_1 reliée à E_1 et Y_2 reliée à E_2, masses communes.

MÉTHODE
Un oscilloscope mesure la tension entre le point relié à sa voie et la masse. Pour visualiser une tension, repérer le point situé à la pointe de sa flèche et y brancher la voie.



2.2 · Figure 1 : branchements de l'oscilloscope (pointillés orange)

2.3.1 Calculer la période T_P de la porteuse.

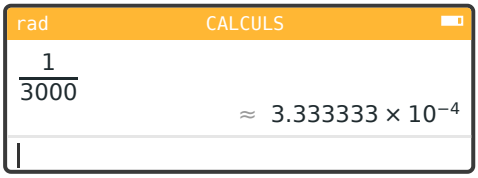
Données utiles $f_P = 3000$ Hz

$$T_P = \frac{1}{f_P} = \frac{1}{3000} = 3{,}33 \times 10^{-4} \text{ s}$$

$T_P = 3{,}33 \times 10^{-4}$ s $= 0{,}333$ ms

COMPRENDRE
On garde trois chiffres significatifs : la valeur sert ensuite à compter des divisions sur l'écran. Avec deux chiffres, comme pour U_P, on écrirait $3{,}3 \times 10^{-4}$ s.

À LA CALCULATRICE



2.3.2 Représenter la tension $u_P(t)$ sur la figure 2 de l'annexe.

Données utiles $U_P = 2{,}5$ V ; $T_P = 0{,}333$ ms (2.3.1) ; sensibilités : $1\ \text{V} \cdot \text{div}^{-1}$ et $0{,}1\ \text{ms} \cdot \text{div}^{-1}$

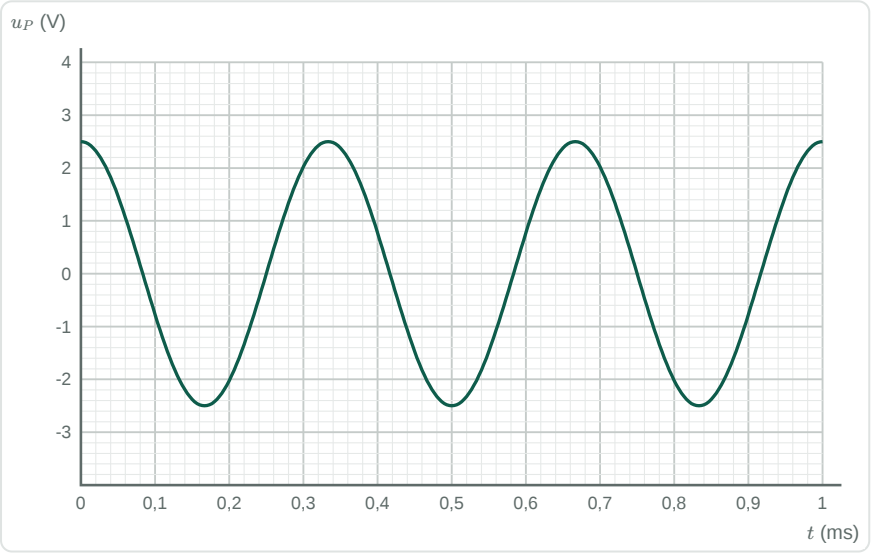
Dans l'expression de l'énoncé, f désigne la fréquence f_P : $u_P(t) = U_P \cos(2\pi f_P\, t)$.

Hauteur de l'amplitude : $\dfrac{2{,}5}{1} = 2{,}5$ divisions de part et d'autre de l'axe central.

Largeur d'une période : $\dfrac{0{,}333}{0{,}1} = 3{,}33$ divisions.

L'écran compte 10 divisions, soit $1{,}0$ ms : on y trace $\dfrac{1{,}0}{0{,}333} = 3$ périodes. La fonction est un cosinus : en prenant $t = 0$ au bord gauche, la courbe part de son maximum.

> Sinusoïde centrée sur l'axe, d'amplitude 2,5 div et de période 3,33 div : 3 périodes à l'écran.

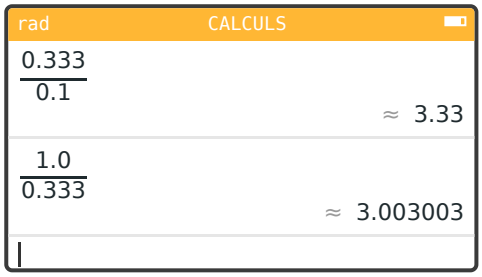


2.3.2 · Figure 2 complétée : 1 V/div et 0,1 ms/div, trois périodes sur l'écran

PIÈGE
L'amplitude se mesure de l'axe central au sommet. La courbe s'étend donc sur 5 divisions de crête à crête, et non sur 2,5.

COMPRENDRE
L'énoncé écrit f pour f_P et annonce la « voie 1 » alors que la question 2.2 place la porteuse sur la voie 2. Ces coquilles ne changent pas le tracé, fixé par les deux sensibilités.

À LA CALCULATRICE



2.4.1 Choisir, en justifiant, l'expression de la tension $u_1(t)$: $U_1 \cos(2\pi f_1 t)$ ou $U_1 \cos(2\pi f_1 t) + U_0$.

Sur l'oscillogramme, la tension oscille symétriquement autour de l'axe central : elle monte à $+3$ divisions et descend à -3 divisions. Sa valeur moyenne est nulle : il n'y a pas de tension de décalage U_0.

> $u_1(t) = U_1 \cos(2\pi f_1\, t)$

COMPRENDRE
Multipliée seule par la porteuse, cette tension donnerait une enveloppe qui s'annule. La figure 3 montre une enveloppe qui reste loin de zéro : une tension continue U_0 a donc été ajoutée au signal modulant avant le multiplieur.

2.4.2 Choisir, en justifiant, la fréquence f_1 que doit délivrer le GBF : 10 000 Hz ou 100 Hz.

Données utiles $f_P = 3000$ Hz ; figure 3 : $2\ \text{ms} \cdot \text{div}^{-1}$

Pour une modulation d'amplitude correcte, la fréquence de la porteuse doit être très supérieure à celle du signal modulant : $f_P \gg f_1$.

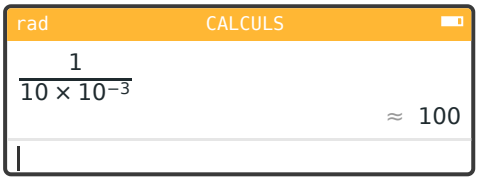
Avec $f_P = 3000$ Hz, seule la valeur 100 Hz convient (10 000 Hz est supérieure à f_P).

Vérification sur la figure 3 : l'enveloppe se répète toutes les 5 divisions, soit $T_1 = 5 \times 2 = 10$ ms, d'où $f_1 = \dfrac{1}{10 \times 10^{-3}} = 100$ Hz.

$f_1 = 100$ Hz

MÉTHODE
Dans un signal modulé en amplitude, les oscillations rapides ont la fréquence de la porteuse et l'enveloppe a la fréquence du signal modulant. La période de l'enveloppe donne donc directement f_1.

À LA CALCULATRICE



2.4.3 Déterminer l'amplitude U_1 de la tension.

Données utiles sensibilité verticale : $0{,}5\ \text{V} \cdot \text{div}^{-1}$

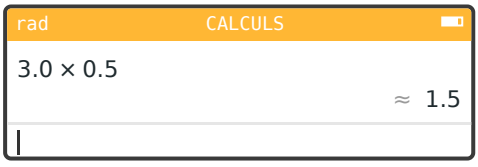
Le sommet de la courbe se situe à 3,0 divisions au-dessus de l'axe central.

$$U_1 = 3{,}0 \times 0{,}5 = 1{,}5\ \text{V}$$

$U_1 = 1{,}5$ V

PIÈGE
Lire 6 divisions donne la tension crête à crête (3,0 V), soit le double de l'amplitude.

À LA CALCULATRICE



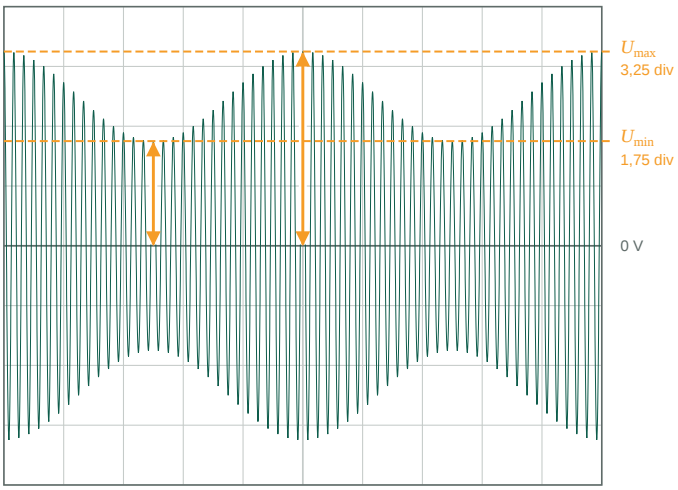
2.5.1 Faire apparaître U_{min} et U_{max} sur l'oscillogramme de la figure 3.

L'amplitude U_m de la tension modulée est la hauteur de l'enveloppe au-dessus de l'axe central (0 V).

U_{max} se lit là où l'enveloppe est la plus haute (ventre), U_{min} là où elle est la plus resserrée (creux).

Voir la figure 3 complétée : U_{max} au sommet de l'enveloppe, U_{min} à son creux, mesurées depuis l'axe central.

PIÈGE
U_{min} n'est pas la valeur la plus basse de $s(t)$, qui est négative. C'est la plus petite amplitude, donc une valeur positive lue sur l'enveloppe supérieure.



2.5.1 · Figure 3 complétée : amplitudes extrêmes de la tension modulée

2.5.2 Calculer le taux de modulation m.

Données utiles $m = \dfrac{U_{max} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}}$; figure 3 : $2\ \text{V} \cdot \text{div}^{-1}$

Lecture sur la figure 3 : le sommet de l'enveloppe est à environ $3{,}25$ divisions de l'axe, son creux à environ $1{,}75$ division.

$$U_{max} = 3{,}25 \times 2 = 6{,}5\ \text{V} \qquad U_{min} = 1{,}75 \times 2 = 3{,}5\ \text{V}$$

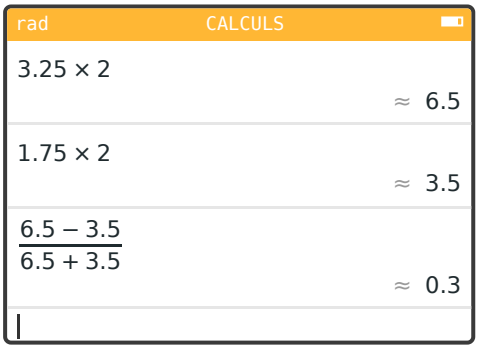
$$m = \frac{U_{max} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}} = \frac{6{,}5 - 3{,}5}{6{,}5 + 3{,}5} = 0{,}30$$

$m \approx 0{,}30$ (sans unité)

COMPRENDRE
La lecture se fait au quart de division près : toute valeur de m voisine de $0{,}3$ est acceptable. Le taux est un rapport de tensions : on peut le calculer directement avec les nombres de divisions.

MÉTHODE
Pour une lecture plus fine, mesurer les hauteurs crête à crête de l'enveloppe ($2\,U_{max}$ et $2\,U_{min}$) : le facteur 2 se simplifie dans le rapport.

À LA CALCULATRICE



2.5.3 Quelle condition sur m permet d'éviter une surmodulation ?

Il n'y a pas de surmodulation tant que l'amplitude U_m ne s'annule pas, c'est-à-dire tant que $U_{min} > 0$. D'après l'expression de m, cela revient à :

$m < 1$; c'est le cas ici, puisque $m \approx 0{,}30$.

COMPRENDRE
Si $m > 1$, l'enveloppe du signal modulé ne reproduit plus la forme du signal modulant : un récepteur à détection d'enveloppe restituerait un son déformé.

3 Calculer l'ordre de grandeur de la fréquence des ondes hertziennes kilométriques (« grandes ondes »).

Données utiles $1052\ \text{m} \leqslant \lambda \leqslant 2000\ \text{m}$; $c = 3{,}0 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

La longueur d'onde et la fréquence sont liées par $\lambda = \dfrac{c}{f}$, donc $f = \dfrac{c}{\lambda}$.

Pour $\lambda = 2000$ m : $f = \dfrac{3{,}0 \times 10^8}{2000} = 1{,}5 \times 10^5\ \text{Hz}$

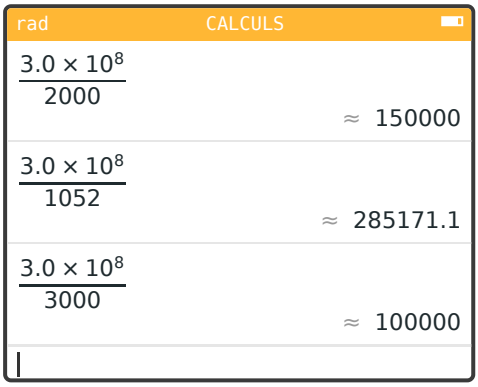
Pour $\lambda = 1052$ m : $f = \dfrac{3{,}0 \times 10^8}{1052} = 2{,}9 \times 10^5\ \text{Hz}$

f est de l'ordre de 10^5 Hz (entre 150 kHz et 290 kHz).

COMPRENDRE

Avec la porteuse de l'expérience (3000 Hz), on aurait $\lambda = \dfrac{c}{f_P} = 1{,}0 \times 10^5$ m, soit 100 km : aucune antenne n'a cette taille. D'où des porteuses de fréquence bien plus élevée.

À LA CALCULATRICE



Matière et antimatière

Bac S 2011 Amérique du Nord (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1.1 Einstein a proposé la relation $E = m\,c^2$. Nommer les grandeurs qui y apparaissent et donner leur unité.

- E : énergie de masse d'une particule au repos, en joules (J) ;
- m : masse de cette particule, en kilogrammes (kg) ;
- c : célérité de la lumière dans le vide, en mètres par seconde ($\mathrm{m\cdot s^{-1}}$).

E en J, m en kg, c en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$: la relation traduit l'équivalence entre masse et énergie.

PIÈGE
Avec une masse en unité de masse atomique ou une énergie en MeV, la relation ne s'applique pas directement : il faut d'abord revenir au kilogramme et au joule.

1.1.2 En s'appuyant sur cette relation, commenter la phrase en gras du texte (annihilation des particules et des antiparticules, univers rempli de rayonnement mais vide de matière).

Toute masse m correspond à une énergie $E = m\,c^2$. Lorsqu'une particule rencontre son antiparticule, les deux disparaissent : leur masse est entièrement convertie en énergie, emportée par des photons, donc par du rayonnement.

Si matière et antimatière avaient existé en quantités rigoureusement égales, chaque particule aurait trouvé une antiparticule avec laquelle s'annihiler.

Il ne resterait alors plus aucune masse, seulement l'énergie du rayonnement : un univers « rempli de rayonnement mais vide de matière ».

COMPRENDRE
L'énergie ne disparaît pas, elle change de forme : l'énergie de masse des particules devient énergie des photons. C'est la masse qui n'est pas conservée dans une réaction nucléaire.

1.2.1 Écrire l'équation de la réaction nucléaire entre un électron et un positon, qui produit deux photons γ de masse nulle.

L'électron porte la charge $-e$, le positon la charge $+e$; aucun des deux ne contient de nucléon ($A = 0$). Le photon n'a ni charge ni nucléon.

Conservation de la charge : $-1 + 1 = 0$; conservation du nombre de nucléons : $0 + 0 = 0$.

$$ {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + {}^{0}_{1}\mathrm{e} \longrightarrow 2\,{}^{0}_{0}\gamma $$

PIÈGE
Écrire un seul photon, ou noter le positon ${}^{0}_{-1}\mathrm{e}$: la charge électrique ne serait plus conservée.

1.2.2 Calculer l'énergie libérée par la réaction entre un positon et un électron.

Données utiles $m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}$ kg (électron et positon) ; $c = 2{,}998 \times 10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

Les photons ont une masse nulle : toute la masse initiale disparaît. La variation de masse est $\Delta m = 0 - (m_e + m_e) = -2\,m_e$.

L'énergie libérée est $E_{\text{lib}} = |\Delta m|\,c^2 = 2\,m_e\,c^2$.

$$E_{\text{lib}} = 2 \times 9{,}109 \times 10^{-31} \times (2{,}998 \times 10^{8})^2$$

$$E_{\text{lib}} = 1{,}637 \times 10^{-13}\ \mathrm{J}$$

PIÈGE
Ne compter qu'une seule masse : l'électron et le positon disparaissent tous les deux.

COMPRENDRE
Quatre chiffres significatifs, comme m_e et c. La variation d'énergie du système est $\Delta E = \Delta m\,c^2 = -1{,}637 \times 10^{-13}$ J : le signe moins indique que le système cède cette énergie à l'extérieur.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$2 \times 9.109 \times 10^{-31} \times (2.998 \times 10^{8})^{2} \approx 1.637435 \times 10^{-13}$

1.2.3 En déduire l'énergie créée lors de l'éruption solaire de juillet 2002 et la comparer à la consommation journalière moyenne d'énergie électrique française.

Données utiles masse d'antimatière créée : $m = 0{,}5$ kg ; $E_{\text{lib}} = 1{,}637 \times 10^{-13}$ J (1.2.2) ; $1\ \text{W}\cdot\text{h} = 3600$ J ; consommation journalière : 1200 GW·h

Le demi-kilogramme d'antimatière est formé de positons. Leur nombre est $N = \dfrac{m}{m_e} = \dfrac{0{,}5}{9{,}109 \times 10^{-31}} = 5{,}489 \times 10^{29}$.

Chaque positon s'annihile avec un électron en libérant E_{lib} :

$$E = N \times E_{\text{lib}} = 5{,}489 \times 10^{29} \times 1{,}637 \times 10^{-13} = 8{,}99 \times 10^{16}\ \text{J}$$

Conversion : $E = \dfrac{8{,}99 \times 10^{16}}{3600} = 2{,}50 \times 10^{13}\ \text{W}\cdot\text{h} = 2{,}50 \times 10^{4}\ \text{GW}\cdot\text{h}$.

Comparaison : $\dfrac{2{,}50 \times 10^{4}}{1200} \approx 21$.

$E \approx 9 \times 10^{16}$ J $\approx 2{,}5 \times 10^{4}$ GW · h, soit environ 21 jours de consommation électrique française : le texte (« plusieurs jours » pour un grand pays) est confirmé.

PIÈGE
« Un demi-kilogramme » n'est connu qu'à un chiffre significatif : annoncer $8{,}988 \times 10^{16}$ J n'a pas de sens, un ordre de grandeur (une vingtaine de jours) suffit.

COMPRENDRE
$E = N \times 2\,m_e\,c^2 = 2\,m\,c^2$: le demi-kilogramme d'antimatière s'annihile avec un demi-kilogramme de matière, c'est un kilogramme entier qui est converti en énergie.

MÉTHODE
Préfixe giga : $1\ \text{GW}\cdot\text{h} = 10^{9}\ \text{W}\cdot\text{h}$. Convertir d'abord les joules en W·h (diviser par 3600), puis en GW·h (diviser par 10^{9}).

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{0.5}{9.109 \times 10^{-31}} \approx 5.489077 \times 10^{29}$

$\dfrac{0.5}{9.109 \times 10^{-31}} \times 1.637 \times 10^{-13} \approx 8.985619 \times 10^{16}$

$\dfrac{8.99 \times 10^{16}}{3600} \approx 2.497222 \times 10^{13}$

$\dfrac{2.50 \times 10^{4}}{1200} \approx 20.83333$

2.1.1 Qu'appelle-t-on « particule alpha » ?

Une particule alpha est un noyau d'hélium 4, noté $^{4}_{2}\text{He}$: il contient 2 protons et 2 neutrons.

PIÈGE
Répondre « un atome d'hélium » : la particule alpha est le noyau seul, de charge $+2e$.

2.1.2 En appliquant les lois de conservation, écrire l'équation de la réaction 1 avec les symboles des noyaux et des particules mis en jeu.

Données utiles ${}_{13}\mathrm{Al}$; ${}_{15}\mathrm{P}$; aluminium 27 ; phosphore 30

Réactifs : ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ et ${}^{27}_{13}\mathrm{Al}$; produits : ${}^{30}_{15}\mathrm{P}$ et un neutron ${}^{1}_{0}\mathrm{n}$.

Conservation du nombre de nucléons : $4 + 27 = 30 + 1 = 31$.

Conservation de la charge électrique : $2 + 13 = 15 + 0 = 15$.

$${}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{27}_{13}\mathrm{Al} \longrightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

MÉTHODE
Lois de Soddy : dans une équation nucléaire, la somme des nombres de masse A et la somme des nombres de charge Z sont les mêmes de chaque côté de la flèche. On les vérifie toujours explicitement.

2.1.3 Donner l'expression de la variation d'énergie de la réaction 1.

La variation d'énergie est le produit de la variation de masse par c^2, la variation de masse étant « masse des produits moins masse des réactifs ».

$$\Delta E = [\, m(\mathrm{P}) + m(\mathrm{n}) - m(\mathrm{He}) - m(\mathrm{Al}) \,]\, c^2$$

PIÈGE
Inverser l'ordre (réactifs moins produits) change le signe de ΔE et fausse la conclusion de la question suivante.

2.1.4 Calculer la valeur de cette variation d'énergie en MeV. La réaction provoque-t-elle une perte ou un gain de masse ?

Données utiles $m(\mathrm{P}) = 29{,}970\,1$ u ; $m(\mathrm{Al}) = 26{,}974\,4$ u ; $m(\mathrm{He}) = 4{,}001\,50$ u ; $m(\mathrm{n}) = 1{,}008\,66$ u ; 1 u correspond à 931,5 MeV

Variation de masse :

$$\Delta m = 29{,}970\,1 + 1{,}008\,66 - 4{,}001\,50 - 26{,}974\,4 = 2{,}86 \times 10^{-3}\ \mathrm{u}$$

Une masse de 1 u correspond à 931,5 MeV, donc $\Delta E = 2{,}86 \times 10^{-3} \times 931{,}5 = 2{,}66\ \mathrm{MeV}$.

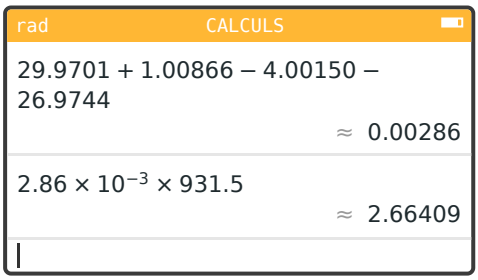
$\Delta m > 0$: la masse des produits est supérieure à celle des réactifs.

$\Delta E \approx 2{,}7\ \mathrm{MeV}$; la réaction s'accompagne d'un **gain de masse**.

COMPRENDRE
Deux masses ne sont données qu'à 10^{-4} u près : la différence $0{,}002\,86$ u n'a guère que deux chiffres fiables, d'où 2,7 MeV. Une valeur de 2,66 MeV est aussi acceptée.

COMPRENDRE
$\Delta E > 0$: le système doit recevoir de l'énergie. Elle est apportée par l'énergie cinétique des particules alpha, d'où la nécessité du bombardement.

À LA CALCULATRICE



2.2.1 En appliquant les lois de conservation, écrire l'équation de désintégration du phosphore 30 (réaction 2). De quel type de désintégration s'agit-il ?

Données utiles ${}_{14}\mathrm{Si}$; ${}_{15}\mathrm{P}$

Le phosphore 30 émet un positon ${}^{0}_{1}\mathrm{e}$ et donne un noyau de silicium ${}^{A}_{14}\mathrm{Si}$.

Conservation du nombre de nucléons : $30 = A + 0$, donc $A = 30$.

Conservation de la charge électrique : $15 = 14 + 1$, vérifiée.

${}^{30}_{15}\mathrm{P} \longrightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + {}^{0}_{1}\mathrm{e}$: c'est une désintégration β^+.

COMPRENDRE
Le nombre de nucléons reste 30 mais Z diminue d'une unité : dans le noyau, un proton s'est transformé en neutron en émettant le positon.

2.2.2 Cette réaction est-elle spontanée ou provoquée ? Justifier sans calcul si elle provoque une perte ou un gain de masse.

Le phosphore 30 est radioactif : son noyau, instable, se désintègre seul, sans intervention extérieure. La réaction 2 est donc **spontanée**, alors que la réaction 1 était provoquée par le bombardement.

Une réaction nucléaire spontanée libère de l'énergie vers l'extérieur : $\Delta E < 0$. Comme $\Delta E = \Delta m\, c^2$, on a $\Delta m < 0$.

Réaction spontanée, qui s'accompagne d'une **perte de masse** : la masse des produits est inférieure à celle du noyau de phosphore 30.

MÉTHODE
Perte de masse : énergie libérée, réaction possible spontanément. Gain de masse : énergie à fournir, réaction nécessairement provoquée (cas de la réaction 1).

3.1 Définir l'activité $A(t)$ d'un échantillon radioactif, puis donner l'expression de la loi de décroissance radioactive pour l'activité en expliquant chaque terme.

L'activité $A(t)$ d'un échantillon est le nombre moyen de désintégrations qui s'y produisent par seconde à la date t. Elle s'exprime en becquerels (1 Bq = 1 désintégration par seconde).

Loi de décroissance : $A(t) = A_0\, e^{-\lambda t}$, avec :

- A_0 : activité de l'échantillon à la date $t = 0$, en Bq ;
- λ : constante radioactive du noyau, en s^{-1} ;
- t : date, en s.

$$A(t) = A_0\, e^{-\lambda t}$$

COMPRENDRE
L'activité est proportionnelle au nombre $N(t)$ de noyaux encore présents : $A(t) = \lambda\, N(t)$. Elle suit donc la même loi exponentielle que $N(t)$.

3.2 Définir le temps de demi-vie $t_{1/2}$ et montrer que $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$, λ étant la constante de désintégration.

Le temps de demi-vie $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents s'est désintégrée. L'activité est alors elle aussi divisée par deux :

$$A(t_{1/2}) = \frac{A_0}{2} \quad \text{soit} \quad A_0\, e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{A_0}{2} \quad \text{donc} \quad e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

En prenant le logarithme népérien : $-\lambda\, t_{1/2} = \ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

PIÈGE
La demi-vie n'est pas la moitié de la durée de vie de l'échantillon : au bout de $2\, t_{1/2}$, il reste encore un quart des noyaux.

3.3 Exprimer t_1 en fonction de A_0, A_1 et $t_{1/2}$, puis calculer sa valeur.

Données utiles $A_0 = 7{,}2 \times 10^{13}$ Bq ; $A_1 = 9{,}0 \times 10^{12}$ Bq ; $t_{1/2} = 156$ s

À la date t_1 : $A_1 = A_0\, e^{-\lambda t_1}$, donc $e^{-\lambda t_1} = \dfrac{A_1}{A_0}$ et $\lambda\, t_1 = \ln \dfrac{A_0}{A_1}$.

Avec $\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$ (3.2) :

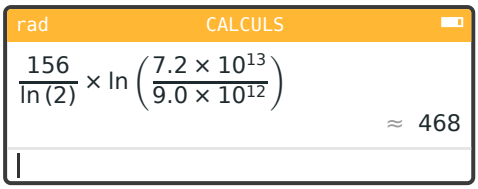
$$t_1 = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{A_0}{A_1} = \frac{156}{\ln 2} \times \ln \frac{7{,}2 \times 10^{13}}{9{,}0 \times 10^{12}}$$

$$t_1 = 468 \text{ s} \approx 4{,}7 \times 10^2 \text{ s}$$

PIÈGE
Écrire $\ln \dfrac{A_1}{A_0}$ donne une date négative. Vérifier que le rapport placé dans le logarithme est supérieur à 1.

COMPRENDRE
Les activités sont données avec deux chiffres significatifs : en toute rigueur $t_1 \approx 4{,}7 \times 10^2$ s, soit un peu moins de 8 minutes.

À LA CALCULATRICE



3.4 Montrer que l'on aurait pu trouver ce résultat facilement en calculant le rapport de A_0 sur A_1.

Données utiles $A_0 = 7{,}2 \times 10^{13}$ Bq ; $A_1 = 9{,}0 \times 10^{12}$ Bq ; $t_{1/2} = 156$ s

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{7{,}2 \times 10^{13}}{9{,}0 \times 10^{12}} = 8{,}0 = 2^3$$

L'activité a été divisée par 8. Or elle est divisée par 2 à chaque demi-vie : par 2 après $t_{1/2}$, par 4 après $2\,t_{1/2}$, par 8 après $3\,t_{1/2}$.

$t_1 = 3\,t_{1/2} = 3 \times 156 = 468$ s : on retrouve la valeur de la question 3.3.

MÉTHODE

Après n demi-vies, l'activité est divisée par 2^n. Quand le rapport A_0/A est une puissance de 2, la date se lit sans logarithme : $t = n\,t_{1/2}$.

À LA CALCULATRICE

