Voyager en se repérant: le G.P.S. et les horloges

Bac S 2004 Polynésie rattrapage (ancien programme) · Exercice 1 **9,5 points** **Durée conseillée 1 h 57**

1.1 Donner l'expression vectorielle de l'accélération $\vec{a}_G$ d'un satellite en fonction des données, puis montrer que son mouvement circulaire est uniforme.

Système {satellite}, de masse m et de centre G ; référentiel géocentrique supposé galiléen. Seule force : l'attraction gravitationnelle de la Terre, dirigée de G vers le centre O de la Terre.
Avec $\vec{u}_N$ unitaire, de G vers O, et $OG = R_T + h$:

$$\vec{F} = \frac{G\,m\,M_T}{(R_T+h)^2}\,\vec{u}_N$$

Deuxième loi de Newton : $\vec{F} = m\,\vec{a}_G$, donc

$$\vec{a}_G = \frac{G\,M_T}{(R_T+h)^2}\,\vec{u}_N$$

Dans le repère de Frenet, pour une trajectoire circulaire de rayon $R_T + h$: $\vec{a}_G = \dfrac{v^2}{R_T+h}\,\vec{u}_N + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_T$.

L'accélération trouvée n'a pas de composante selon $\vec{u}_T$: $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$.

$\vec{a}_G = \dfrac{G\,M_T}{(R_T+h)^2}\,\vec{u}_N$; la valeur v de la vitesse est constante : le mouvement circulaire est **uniforme**.

PIÈGE
Écrire h^2 au dénominateur : la distance utile est celle entre les centres, $R_T + h$. Autre erreur : dire « $\vec{a}_G$ est constant ». Sa direction change sans cesse, seule sa valeur est constante.

MÉTHODE
Satellite en orbite circulaire : deuxième loi de Newton, puis identification avec l'accélération dans le repère de Frenet. La composante tangentielle donne l'uniformité, la composante normale donne la vitesse.

1.2 Exprimer la vitesse du satellite en fonction de G, R_T, M_T et h dans le référentiel géocentrique.

Par identification des composantes selon $\vec{u}_N$ (question 1.1) :

$$\frac{v^2}{R_T+h} = \frac{G\,M_T}{(R_T+h)^2} \quad \text{soit} \quad v^2 = \frac{G\,M_T}{R_T+h}$$

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T+h}}$$

COMPRENDRE
La masse du satellite n'intervient pas : tous les satellites placés à la même altitude ont la même vitesse. Plus l'altitude est grande, plus la vitesse est faible.

1.3 Vérifier que la vitesse et la période de révolution annoncées dans le texte sont compatibles avec l'altitude des satellites.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$; $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg ; $R_T = 6380$ km ; $h = 20\,180$ km ; texte : $v \approx 14\,000\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, $T \approx 12$ h

Rayon de l'orbite : $R_T + h = 6380 + 20\,180 = 26\,560\ \text{km} = 2{,}656 \times 10^7$ m.

Vitesse (question 1.2) :

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{2{,}656 \times 10^7}} = 3{,}88 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

soit $v = 3{,}88 \times 10^3 \times 3{,}6 = 1{,}40 \times 10^4\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Période : le satellite parcourt la circonférence $2\pi(R_T + h)$ à vitesse constante, donc

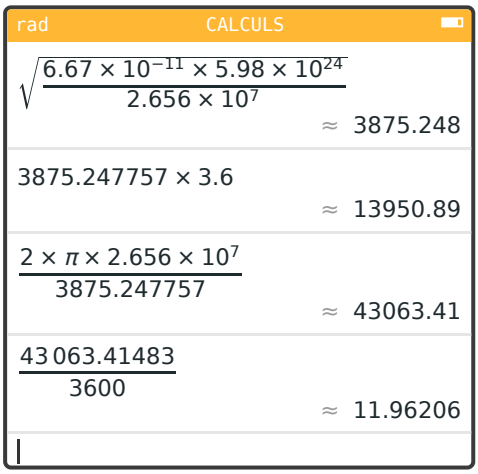
$$T = \frac{2\pi\,(R_T + h)}{v} = \frac{2\pi \times 2{,}656 \times 10^7}{3{,}88 \times 10^3} = 4{,}31 \times 10^4\ \text{s} \approx 12{,}0\ \text{h}$$

$v = 1{,}40 \times 10^4\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ et $T \approx 12{,}0$ h : les valeurs du texte ($14\,000\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, 12 heures) sont compatibles avec l'altitude de $20\,180$ km.

PIÈGE
Laisser le rayon en kilomètres dans la formule de la vitesse : avec G en unités SI, il faut des mètres. La conversion de $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ se fait en multipliant par 3,6.

COMPRENDRE
Résultats à trois chiffres significatifs, comme G et M_T, les données les moins précises. On garde la valeur non arrondie de v en mémoire pour calculer T.

À LA CALCULATRICE



1.4 Un tel satellite est-il géostationnaire ? Justifier.

Un satellite géostationnaire reste à la verticale d'un même point de la Terre. Il faut pour cela que sa période de révolution soit égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même (environ 24 h) et que son orbite soit dans le plan de l'équateur.

Ici $T \approx 12$ h, et les orbites sont inclinées de 55° par rapport à l'équateur.

Ces satellites ne sont **pas géostationnaires** : leur période (12 h) est différente de 24 h.

COMPRENDRE
Un seul des deux arguments suffit. Vu du sol, un satellite GPS se déplace dans le ciel : c'est pourquoi le texte parle d'une « configuration mouvante ».

2.1.1 Calculer les longueurs d'onde dans le vide des ondes émises par les satellites.

Données utiles $c = 3{,}00 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $f_1 = 1{,}6$ GHz ; $f_2 = 1{,}2$ GHz

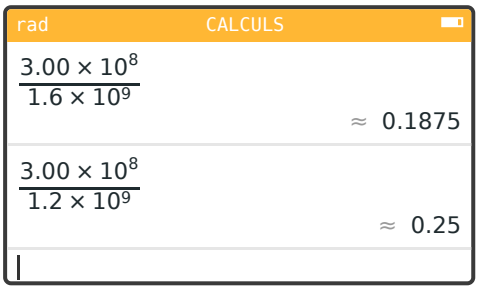
Dans le vide : $\lambda = \dfrac{c}{f}$, avec $1\ \text{GHz} = 10^9$ Hz.

$$\lambda_1 = \frac{3{,}00 \times 10^8}{1{,}6 \times 10^9} = 0{,}19\ \text{m} \qquad \lambda_2 = \frac{3{,}00 \times 10^8}{1{,}2 \times 10^9} = 0{,}25\ \text{m}$$

$\lambda_1 = 0{,}19$ m (pour 1,6 GHz) et $\lambda_2 = 0{,}25$ m (pour 1,2 GHz)

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme les fréquences. La fréquence la plus élevée correspond à la longueur d'onde la plus courte.

À LA CALCULATRICE



2.1.2 Calculer la durée t mise par le signal pour aller du satellite S au récepteur R, le satellite étant à la verticale de R.

Données utiles $h = 20\,180\ \text{km} = 2{,}018 \times 10^7$ m ; $c = 3{,}00 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

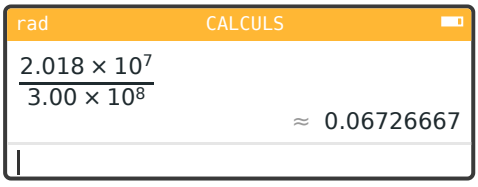
Le signal parcourt la distance $SR = h$ à la célérité c :

$$t = \frac{h}{c} = \frac{2{,}018 \times 10^7}{3{,}00 \times 10^8}$$

$t = 6{,}73 \times 10^{-2}$ s, soit environ 67 ms

PIÈGE
Oublier de convertir l'altitude en mètres : le résultat serait mille fois trop petit.

À LA CALCULATRICE



2.1.3 L'erreur sur la distance verticale est de 20 m. Calculer en nanosecondes l'erreur Δt sur la durée de propagation, la comparer à t et commenter.

Données utiles $\Delta h = 20$ m ; $c = 3{,}00 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $t = 6{,}73 \times 10^{-2}$ s (2.1.2)

Une erreur Δh sur la distance correspond à une erreur Δt sur la durée :

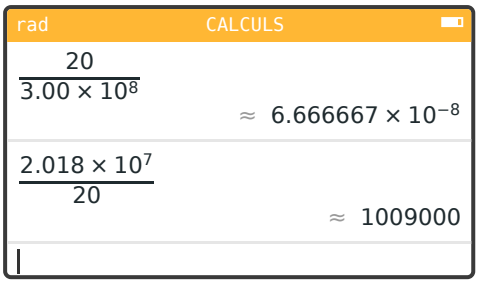
$$\Delta t = \frac{\Delta h}{c} = \frac{20}{3{,}00 \times 10^8} = 6{,}7 \times 10^{-8}\ \text{s} = 67\ \text{ns}$$

Comparaison : $\dfrac{t}{\Delta t} = \dfrac{6{,}73 \times 10^{-2}}{6{,}7 \times 10^{-8}} \approx 1{,}0 \times 10^6$.

$\Delta t = 67$ ns : c'est environ un million de fois plus petit que t. La durée de propagation doit donc être mesurée avec une précision relative de l'ordre de 10^{-6}, ce qui exige des horloges extrêmement précises.

COMPRENDRE
Le rapport des durées est égal au rapport des distances $h/\Delta h$. Une erreur d'une seule microseconde sur la durée donnerait déjà 300 m d'erreur sur la position.

À LA CALCULATRICE



2.1.4 Calculer le nombre N de mesures pour que l'erreur passe de 20 m à 20 cm, puis la durée nécessaire. Discuter l'intérêt d'une telle précision pour un récepteur mobile.

Données utiles erreur divisée par $\sqrt{N}$ pour N mesures ; un signal toutes les millisecondes

L'erreur doit être divisée par $\frac{20}{0{,}20} = 100$, donc $\sqrt{N} = 100$ et $N = 100^2 = 1{,}0 \times 10^4$ mesures.

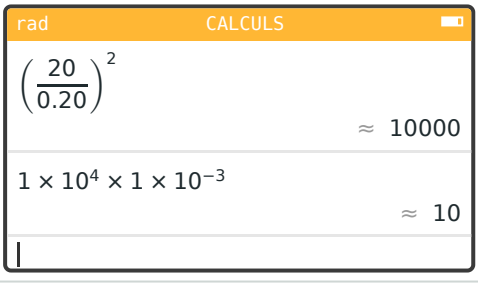
Une mesure par milliseconde : durée $= 1{,}0 \times 10^4 \times 1{,}0 \times 10^{-3} = 10$ s.

Pendant ces 10 s, un récepteur mobile se déplace de bien plus que 20 cm : un piéton parcourt une dizaine de mètres, une voiture plus de cent mètres.

$N = 1{,}0 \times 10^4$ mesures, soit une durée de 10 s. Cette précision n'a d'intérêt que pour un récepteur immobile ; pour un récepteur mobile, elle est illusoire.

PIÈGE
Répondre $N = 100$. L'erreur est divisée par $\sqrt{N}$ et non par N : il faut élever le rapport 100 au carré. Gagner un facteur 100 en précision coûte donc dix mille mesures.

À LA CALCULATRICE



2.2 Dans l'atmosphère, le signal se propage à une célérité différente de c. Sa fréquence et sa longueur d'onde sont-elles modifiées ? Justifier.

La fréquence d'une onde est imposée par la source (l'émetteur du satellite) : elle ne dépend pas du milieu traversé. Elle n'est donc pas modifiée.

La longueur d'onde vaut $\lambda = \frac{v}{f}$, où v est la célérité dans le milieu.

Comme f est inchangée et que v est différente de c, la longueur d'onde change.

La fréquence n'est **pas modifiée** ; la longueur d'onde **est modifiée** (elle diminue si la célérité diminue).

MÉTHODE
À retenir pour tout changement de milieu : la fréquence et la période se conservent, la célérité et la longueur d'onde changent ensemble, dans le même rapport.

2.3 À quel phénomène ondulatoire la dernière phrase du texte fait-elle allusion ?

La dernière phrase indique que les deux signaux, de fréquences différentes (1,6 GHz et 1,2 GHz), se propagent à des vitesses légèrement différentes. La célérité de l'onde dépend donc de sa fréquence dans la haute atmosphère.

Il s'agit de la **dispersion** : la haute atmosphère est un milieu dispersif pour ces ondes radio.

PIÈGE
Confondre avec la diffraction ou la réfraction. Le mot attendu repose sur un seul critère : une célérité qui dépend de la fréquence.

COMPRENDRE
Même phénomène que pour la lumière dans un prisme. Le récepteur géodésique compare les retards des deux signaux pour évaluer, puis corriger, l'effet de l'atmosphère.

3.1 Montrer, par analyse dimensionnelle, que $\sqrt{\frac{l}{g}}$ est homogène à une durée.

l est une longueur : $[l] = \mathrm{L}$. L'intensité de la pesanteur g est une accélération ($\mathrm{m \cdot s^{-2}}$) : $[g] = \mathrm{L \cdot T^{-2}}$.

$$\left[\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L \cdot T^{-2}}}\right)^{1/2} = \left(\mathrm{T^2}\right)^{1/2} = \mathrm{T}$$

$\sqrt{\frac{l}{g}}$ a la dimension T : cette grandeur est bien homogène à une durée.

MÉTHODE
Remplacer chaque grandeur par sa dimension (L, T, M), simplifier, conclure. On peut raisonner de même avec les unités : $\sqrt{\mathrm{m/(m \cdot s^{-2})}} = \mathrm{s}$.

3.2 Quel écart relatif par rapport à T_0 observe-t-on sur la période du pendule lorsque l'amplitude est de 4° ?

Données utiles $T = T_0\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)$, α en radian ; $\alpha = 4^\circ$

Écart relatif : $\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{T_0\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right) - T_0}{T_0} = \frac{\alpha^2}{16}$

Conversion : $\alpha = 4 \times \frac{\pi}{180} = 7{,}0 \times 10^{-2}$ rad.

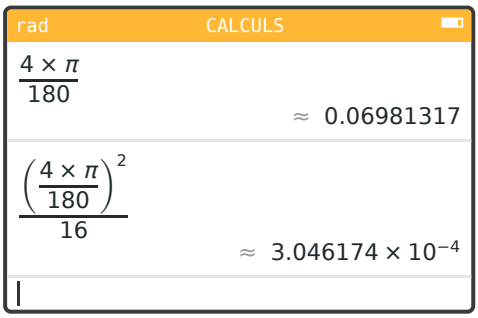
$$\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\left(7{,}0 \times 10^{-2}\right)^2}{16} = 3 \times 10^{-4}$$

$\frac{T - T_0}{T_0} = 3 \times 10^{-4}$, soit 0,03 %

PIÈGE
Laisser l'angle en degrés : on trouverait $4^2/16 = 1$, soit une période doublée, ce qui est absurde pour une petite amplitude.

COMPRENDRE
L'écart est très faible : pour de petites oscillations, la période ne dépend presque pas de l'amplitude. Sur une journée, 0,03 % représente tout de même 26 s.

À LA CALCULATRICE



3.3 Une horloge à balancier a une période $T_1 = 2{,}000$ s là où la pesanteur vaut g_1. Quelle est la période T_2 d'une horloge identique là où elle vaut g_2, avec la même amplitude ?

Données utiles $T_1 = 2{,}000$ s ; $g_1 = 9{,}810\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; $g_2 = 9{,}800\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$

$T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_1}}\left(1+\dfrac{\alpha^2}{16}\right)$ et $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_2}}\left(1+\dfrac{\alpha^2}{16}\right)$, avec la même longueur l et la même amplitude α.

En faisant le rapport : $\dfrac{T_2}{T_1} = \sqrt{\dfrac{g_1}{g_2}}$, donc

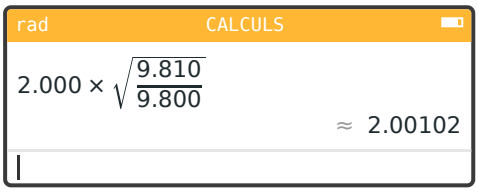
$$T_2 = T_1\sqrt{\frac{g_1}{g_2}} = 2{,}000 \times \sqrt{\frac{9{,}810}{9{,}800}}$$

$T_2 = 2{,}001$ s

COMPRENDRE
Quatre chiffres significatifs, comme les données. La pesanteur étant plus faible, le balancier oscille plus lentement : l'horloge retarde d'environ 44 s par jour.

MÉTHODE
Le rapport des deux périodes élimine tout ce qui est commun, ici la longueur et le terme d'amplitude : inutile de calculer l.

À LA CALCULATRICE



3.4 Pourquoi une horloge à balancier ne convient-elle pas pour déterminer une longitude ?

La période du balancier dépend de l'intensité de la pesanteur g (question 3.3). Or g varie d'un lieu à l'autre du globe, notamment avec la latitude. Au cours du voyage, la période de l'horloge change : elle avance ou retarde et ne conserve plus l'heure du méridien de Greenwich.

L'horloge à balancier dérive lorsque le navire se déplace, car sa période dépend de g : l'écart horaire mesuré, donc la longitude, est faux.

COMPRENDRE
Autres défauts à bord d'un navire : le roulis et le tangage perturbent les oscillations, et la longueur du balancier varie avec la température.

3.5 L'horloge à ressort spiral de John Harrison ne dériva pas de plus de 15 s en 156 jours. Calculer la précision de cette horloge.

Données utiles dérive $\delta t = 15$ s ; durée $\Delta t = 156$ jours

La précision est l'écart relatif entre la dérive et la durée mesurée, exprimées dans la même unité.

$\Delta t = 156 \times 24 \times 3600 = 1{,}35 \times 10^7$ s

$$\frac{\delta t}{\Delta t} = \frac{15}{1{,}35\times10^7} = 1{,}1\times10^{-6}$$

Précision : $\dfrac{\delta t}{\Delta t} = 1{,}1\times10^{-6}$, soit environ une seconde de dérive pour un million de secondes

COMPRENDRE
Cela représente une dérive inférieure à 0,1 s par jour. L'horloge à balancier de la question 3.3 en perdait 44 dans le même temps.

3.6 À quelle distance en kilomètres, sur le parallèle de Plymouth (latitude 50° nord), correspondent les 15 s de dérive ?

Données utiles $R_T = 6380$ km ; $\lambda = 50^\circ$; $\delta t = 15$ s ; rotation de la Terre : un tour en 24 h $= 86\,400$ s

Rayon du parallèle : dans le triangle rectangle formé par le centre O de la Terre, le point P et l'axe des pôles, $OP = R_T$ et l'angle en P vaut λ (angles alternes-internes), donc

$$r = R_T \cos\lambda = 6380 \times \cos 50^\circ = 4{,}10 \times 10^3 \text{ km}$$

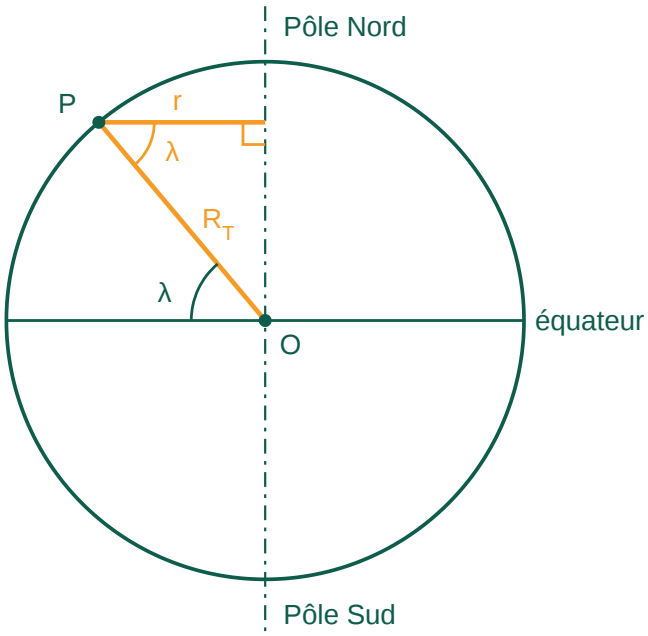
La Terre fait un tour sur elle-même en 24 h : le point P parcourt la circonférence $2\pi r$ du parallèle en $86\,400$ s. Une erreur de 15 s sur l'heure correspond donc à la distance

$$d = 2\pi r \times \frac{\delta t}{86\,400} = 2\pi \times 4{,}10 \times 10^3 \times \frac{15}{86\,400}$$

$d = 4{,}5$ km

PIÈGE
Utiliser R_T à la place de r : on obtiendrait 7,0 km, valeur valable seulement à l'équateur. Vérifier aussi que la calculatrice est en degrés pour $\cos 50^\circ$.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme la dérive de 15 s. Après cinq mois de mer, l'erreur de position due à l'horloge reste inférieure à 5 km.



3.6 · Rayon r du parallèle de latitude λ

À LA CALCULATRICE

deg CALCULS

$6380 \times \cos(50°) \approx 4100.985$

$\frac{2 \times \pi \times 6380 \times \cos(50°) \times 15}{86\,400} \approx 4.473481$