Polynésie 09/2004 Exercice 1 VOYAGER EN SE REPERANT : LE GPS ET LES HORLOGES (9,5 points)

Les trois parties de l'exercice sont indépendantes

De nombreuses activités humaines demandent un repérage précis (latitude, longitude, altitude) sur le globe terrestre ou dans son voisinage.

Actuellement, le Global Positioning System (GPS) a supplanté toutes les autres technologies permettant de repérer sur le globe terrestre, avec une précision voisine de 20 m, un mobile équipé d'un récepteur.

Les différentes parties du problème portent sur les satellites et la mesure du temps. Elles s'appuient sur un texte paru dans la revue « La Recherche » dont les extraits sont donnés en caractères italiques.

1 Les satellites

« En avion, en voiture, en bateau, à pied, en montagne, dans le désert, par beau temps ou au milieu d'une tempête, le GPS donne tout à la fois la position géographique, l'altitude et l'heure exacte.

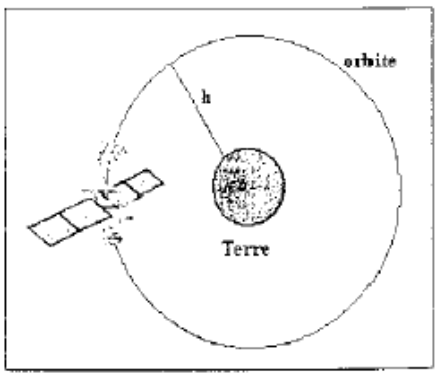
Principe : au lieu d'utiliser des repères terrestres ou de suivre les étoiles, l'utilisateur, muni d'un récepteur, mesure la distance entre lui-même et au moins 4 des 24 satellites de la constellation Navstar. Le récepteur convertit ces distances pour retrouver la latitude, la longitude et l'altitude.

Répartis sur six orbites circulaires inclinées de 55° par rapport à l'Equateur, ces satellites évoluent à une altitude de 20 180 kilomètres. Avec une vitesse proche de 14 000 km.h^{-1}, ils accomplissent un tour du monde en 12 heures. Leur configuration mouvante a été calculée pour qu'au moins quatre d'entre eux soient toujours en vue (99,9% du temps) depuis n'importe quel endroit de la planète »

On rappelle que l'orbite des satellites est circulaire.

Données :

Intensité de pesanteur : $g = 9{,}80$ m.s^{-2}
Masse de la Terre : $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Rayon de la Terre : $R_T = 6380$ km
Constante de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.kg^{-2}.m^2.



1.1. Quelle est l'expression vectorielle de l'accélération $\vec{a}_G$ d'un satellite en fonction des données de l'énoncé ?
Montrer que ce mouvement circulaire est uniforme.

1.2. Quelle est l'expression de sa vitesse en fonction de G, R_T, M_T, h dans un référentiel géocentrique ? (h est l'altitude du satellite)

1.3. Vérifier que la vitesse des satellites sur leur orbite et la période T de rotation, données dans le texte, sont compatibles avec l'altitude.

1.4. Un tel satellite est-il géostationnaire ? Justifier.

2. Les ondes

« Toutes les millisecondes, les satellites émettent des signaux codés sous forme d'ondes radio émises sur deux fréquences différentes (1,6 et 1,2 GHz) et dont la réception au sol va permettre de calculer la position. Un certain nombre de facteurs limite encore, et de façon systématique, la précision du GPS. Par exemple, puisque le signal GPS n'est émis que toutes les millisecondes, un récepteur mobile verra chuter la précision de ces mesures d'autant plus qu'il se déplace vite. Autre difficulté, nuisant à l'exactitude : les ondes ne se propagent pas à une vitesse constante dans la partie la plus haute de l'atmosphère, car celle-ci n'est pas homogène. Citons enfin la position géographique des quatre satellites utilisés par le récepteur : la mesure a d'autant plus de chances d'être faussée que les satellites visibles sont près de l'horizon. En effet, les signaux traversent alors une couche plus épaisse d'une atmosphère parfois non homogène. Tous ces éléments font que les récepteurs vendus aujourd'hui dans le commerce affichent une erreur standard de l'ordre de 20 mètres.
Plus complexes encore, les récepteurs géodésiques (donnant une précision de l'ordre du centimètre) corrigent eux-mêmes les erreurs dues aux variations de la vitesse des ondes dans la partie la plus haute de l'atmosphère. Pour cela, ils enregistrent les deux signaux … que chaque satellite émet simultanément … Ces deux signaux se propagent à des vitesses légèrement différentes »

Les ondes radio sont des ondes électromagnétiques comme les ondes lumineuse et se propagent à la célérité $c = 3{,}00\times10^{8}$ m.s^{-1} dans le vide.

2.1. Dans cette question, on négligera les perturbations introduites par l'atmosphère sur la durée du trajet des ondes.

2.1.1. Calculer les longueurs d'onde dans le vide des ondes émises par les satellites.

2.1.2. Quelle est la durée t mise par le signal pour aller du satellite S au récepteur R si le satellite est situé à la verticale de R à l'altitude de 20 180 km ?

2.1.3 Pour une mesure unique, l'erreur sur la distance verticale est de 20 m en standard. Calculer (en nanosecondes) l'erreur Δt sur la durée de propagation du signal. Comparer t et Δt et commenter.

2.1.4 Pour une série de N mesures, les lois de la statistique montrent que l'erreur est divisée par un facteur $\sqrt{N}$.
Calculer N pour que l'erreur passe de 20 m à 20 cm.
Le signal GPS étant émis toutes les millisecondes, calculer la durée nécessaire pour effectuer ces N mesures. Discuter l'intérêt d'une telle précision pour un récepteur mobile.

2.2. En fait, entre le récepteur et le satellite le signal traverse les couches successives de l'atmosphère et se propage alors à une célérité différente de c. La fréquence et la longueur d'onde du signal sont-elles modifiées lors de la traversée de l'atmosphère ? Justifier.

2.3. A quel phénomène ondulatoire fait allusion la dernière phrase du texte ?

3. Les horloges

Avant l'invention du GPS, pour connaître leur longitude, les navigateurs comparaient l'heure locale (heure déterminée d'après la position du Soleil ou d'une étoile) et au même moment l'heure du méridien de Greenwich donnée par une horloge embarquée dans le navire. La précision de la position du navire dépendait de la précision de la mesure de cet écart horaire

Dans une horloge à balancier, pour une faible amplitude α, la période T vérifie la relation $T = T_0 \left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right)$ avec $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ où l est la longueur du balancier et g l'intensité du champ de pesanteur, α est en radian.

3.1. Montrer, par analyse dimensionnelle, que $\sqrt{\frac{l}{g}}$ est homogène à une durée.

3.2. Quel écart relatif par rapport à T_0 observe-t-on sur la période de ce pendule lorsque l'amplitude est de 4° ?

3.3. Une horloge à balancier a une période $T_1 = 2{,}000$ s en un lieu où l'accélération de la pesanteur vaut $g_1 = 9{,}810$ N.kg^{-1}.

Quelle sera la période T_2 d'une horloge identique de même longueur en un lieu où $g_2 = 9{,}800$ N.kg^{-1} en conservant la même amplitude ?

3.4. Pourquoi une horloge à balancier ne convient-elle pas pour déterminer une longitude ?

3.5. En 1764, pour s'affranchir de cet inconvénient, John Harrison parvint à fabriquer une horloge utilisant un ressort spiral, qui après un voyage aller et retour entre Plymouth et La Barbade ne dériva pas de plus de 15 s en 156 jours.
Calculer la précision de cette horloge.

3.6. A quelle distance, en kilomètres, calculée sur le parallèle de Plymouth, correspondent les 15 s de dérive observées lors du voyage de John Harrison ? La latitude de Plymouth est de 50° nord.
On rappelle que la latitude λ d'un point P est l'angle entre le plan de l'équateur et la droite joignant P au centre de la Terre. Un parallèle est un cercle de rayon r à la surface de la Terre. Tous les points de ce cercle sont à la même latitude λ

