Constante de raideur d'un ressort

Bac S 2011 Amérique du Nord (ancien programme) · Exercice 2 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 Exprimer l'allongement ℓ_0 en fonction de L_0 et de L_e.

L'allongement est la différence entre la longueur du ressort à l'équilibre et sa longueur à vide.

$$\ell_0 = L_e - L_0$$

PIÈGE
Inverser les deux termes : le ressort chargé est plus long qu'à vide, donc $L_e > L_0$ et ℓ_0 doit être positif.

1.2 Établir, en justifiant, la relation entre m, g, k et ℓ_0 à l'équilibre.

Système {solide}, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Forces : le poids $\vec{P} = m\,g\,\vec{i}$, vertical vers le bas ; la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k\,\ell_0\,\vec{i}$, verticale vers le haut puisque le ressort est étiré.

Le solide est immobile : d'après la première loi de Newton (principe d'inertie), $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$.

En projection sur l'axe $(O, \vec{i})$ orienté vers le bas : $m\,g - k\,\ell_0 = 0$.

$$m\,g = k\,\ell_0, \text{ soit } \ell_0 = \frac{g}{k}\,m$$

COMPRENDRE
La force de rappel d'un ressort est proportionnelle à son allongement et s'oppose à la déformation : étiré, le ressort tire le solide vers le haut.

MÉTHODE
Toute étude d'équilibre suit le même plan : système, référentiel galiléen, bilan des forces, première loi de Newton, puis projection sur un axe orienté.

1.3 En utilisant le graphique de la figure 1 de l'annexe, déterminer la valeur de la constante de raideur k du ressort.

Données utiles $g = 9{,}8\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; $\ell_0 = \frac{g}{k}\,m$ (1.2) ; tableau des mesures de ℓ_0

Les points de la figure 1 sont alignés sur une droite passant par l'origine : ℓ_0 est proportionnel à m, soit $\ell_0 = a\,m$, en accord avec la relation de la question 1.2 où $a = \frac{g}{k}$.

Coefficient directeur, calculé entre l'origine et le point de la droite d'abscisse 100×10^{-3} kg :

$$a = \frac{20{,}2 \times 10^{-2} - 0}{100 \times 10^{-3} - 0} = 2{,}02\ \text{m}\cdot\text{kg}^{-1}$$

$$k = \frac{g}{a} = \frac{9{,}8}{2{,}02} = 4{,}85\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$$

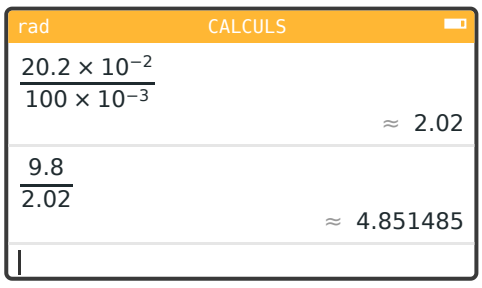
$$k = 4{,}9\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$$

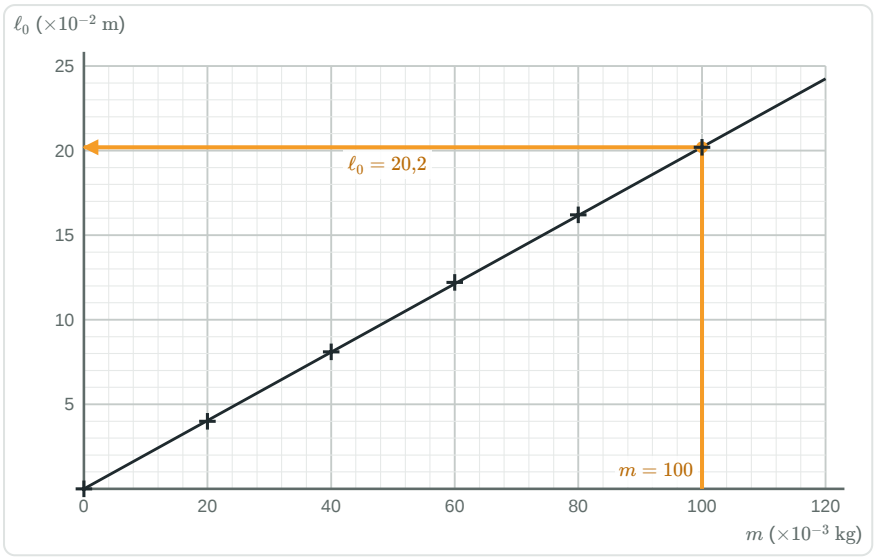
PIÈGE
Les axes sont gradués en 10^{-3} kg et en 10^{-2} m : sans ces puissances de dix, le coefficient directeur est faux d'un facteur 10.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs seulement, comme $g = 9{,}8\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$, la donnée la moins précise. L'unité se vérifie : $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$ divisé par $\text{m}\cdot\text{kg}^{-1}$ donne bien des $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

MÉTHODE
Tracer la droite à la règle au plus près de tous les points, puis choisir pour le calcul deux points de la droite éloignés l'un de l'autre.

À LA CALCULATRICE





1.3 · Figure 1 de l'annexe complétée : droite passant par l'origine

2.1.1 Que représente T_0 dans la solution $x = X_m \cos\left(\dfrac{2\pi t}{T_0}\right)$?

T_0 est la période propre de l'oscillateur : la durée d'une oscillation complète en l'absence d'amortissement.

COMPRENDRE
Le cosinus reprend la même valeur chaque fois que $\dfrac{2\pi t}{T_0}$ augmente de 2π, c'est-à-dire chaque fois que t augmente de T_0.

2.1.2 Montrer que $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Données utiles $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + k\,x = 0$; $x = X_m \cos\left(\dfrac{2\pi t}{T_0}\right)$

On dérive deux fois la solution proposée :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\pi}{T_0} X_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 X_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}\,x$$

On remplace dans l'équation différentielle :

$$-m\,\frac{4\pi^2}{T_0^2}\,x + k\,x = 0 \quad \text{soit} \quad \left(k - \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}\right) x = 0$$

Cette égalité doit être vraie à chaque instant, alors que x n'est pas nul en permanence. Il faut donc $k = \dfrac{4\pi^2 m}{T_0^2}$, d'où $T_0^2 = \dfrac{4\pi^2 m}{k}$.

Une période étant positive :

$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, ce qui est bien la relation attendue.

PIÈGE
Oublier le facteur $\dfrac{2\pi}{T_0}$ qui sort à chaque dérivation : il apparaît deux fois, donc au carré dans la dérivée seconde.

MÉTHODE
Pour vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle : la dériver autant de fois que nécessaire, remplacer, puis chercher la condition qui rend l'égalité vraie à tout instant.

2.2.1 Comment évolue l'amplitude du mouvement au cours du temps ? Comment le justifier ?

L'amplitude des oscillations diminue progressivement au cours du temps.

Le solide est soumis à des forces de frottement, principalement celles de l'air : leur travail est résistant, l'énergie mécanique de l'oscillateur diminue et est dissipée sous forme de chaleur.

L'amplitude décroît à cause des frottements, qui dissipent l'énergie mécanique.

COMPRENDRE
L'énergie mécanique de l'oscillateur est liée au carré de l'amplitude : perdre de l'énergie, c'est osciller de moins en moins loin de la position d'équilibre.

2.2.2 À quelle condition la pseudo-période T est-elle très proche de T_0 ?

$T \approx T_0$ lorsque l'amortissement est faible, c'est-à-dire lorsque les frottements sont peu importants.

COMPRENDRE
C'est le cas ici : le solide oscille dans l'air et l'amplitude ne diminue que lentement d'une oscillation à la suivante.

2.2.3 Comment procéder pour que la mesure de T soit la plus précise possible ?

On chronomètre la durée Δt d'un grand nombre N d'oscillations, par exemple $N = 10$ comme dans le tableau, puis on divise :

$T = \dfrac{\Delta t}{N}$, avec N le plus grand possible.

COMPRENDRE
L'erreur de déclenchement et d'arrêt du chronomètre est la même pour une ou dix oscillations : rapportée à une seule période, elle est divisée par N.

MÉTHODE
Repérer les passages du solide par la position d'équilibre, où il va le plus vite : l'instant de passage y est mieux défini qu'aux positions extrêmes.

2.2.4 Choisir l'une des représentations de la figure 2 de l'annexe pour déterminer la valeur de k, puis la calculer.

Données utiles $T_0^2 = \dfrac{4\pi^2}{k} m$ (2.1.2) ; durées de dix oscillations du tableau

D'après la question 2.1.2, $T_0^2 = \dfrac{4\pi^2}{k} m$: c'est T_0^2 qui est proportionnel à m. On choisit donc la figure 2c, la seule dont les points sont alignés sur une droite passant par l'origine.

Cette droite a pour équation $T_0^2 = a\,m$ avec $a = \dfrac{4\pi^2}{k}$.

Coefficient directeur, entre l'origine et le point de la droite d'abscisse 100×10^{-3} kg, d'ordonnée $0{,}80\ \text{s}^2$:

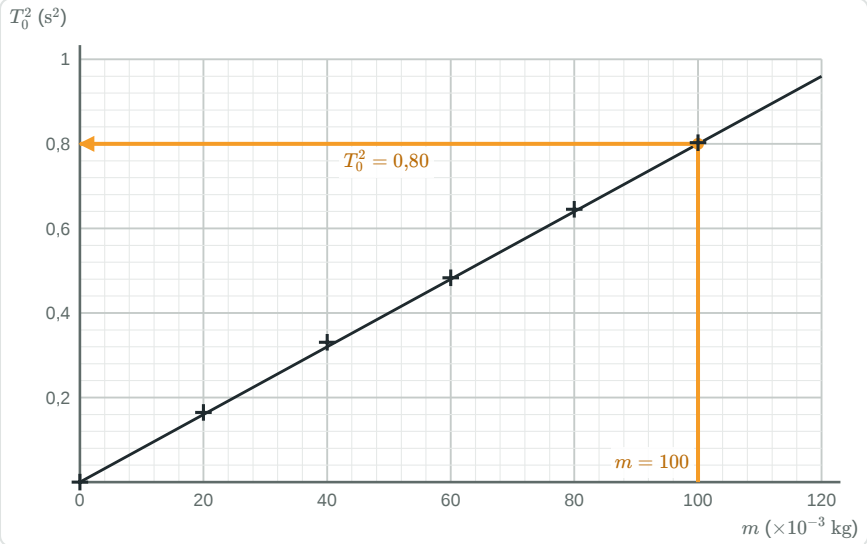
$$a = \frac{0{,}80 - 0}{100 \times 10^{-3} - 0} = 8{,}0\ \text{s}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$k = \frac{4\pi^2}{a} = \frac{4\pi^2}{8{,}0} = 4{,}9\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$k = 4{,}9\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$: la même valeur que par l'étude statique.

PIÈGE
Choisir la figure 2a parce que T_0 y est porté directement : ses points dessinent une courbe, dont on ne peut pas tirer simplement k.

COMPRENDRE
Le tableau confirme la lecture : pour $m = 100 \times 10^{-3}$ kg, $T_0 = 0{,}896$ s, donc $T_0^2 = 0{,}803\ \text{s}^2$. Deux méthodes indépendantes donnant le même k valident les mesures.



2.2.4 · Figure 2c de l'annexe complétée : droite passant par l'origine

À LA CALCULATRICE

