Une équation au service des sciences physiques

Bac S 2005 Antilles-Guyane rattrapage (ancien programme) · Exercice 3 **9,5 points** **Durée conseillée 1 h 57**

1.1 Partie A (circuit électrique). Évaluer graphiquement la durée du régime transitoire.

Sur le graphique 1, l'intensité croît puis se stabilise à $0{,}25$ A. Le palier est atteint vers $t = 0{,}25$ s.

Durée du régime transitoire : $\Delta t \approx 0{,}25$ s

COMPRENDRE
Ancien programme : la bobine et le circuit RL ne figurent plus dans la spécialité actuelle. La démarche (équation différentielle du premier ordre, constante de temps) reste celle du circuit RC.

1.2.1 Partie A. Donner l'expression littérale de la constante de temps τ du dipôle {bobine-conducteur ohmique}.

La résistance totale du circuit est $R + r$, car la bobine est résistive.

$$\tau = \frac{L}{R + r}$$

PIÈGE
Écrire $\tau = L/R$: la résistance r de la bobine ($11{,}8\ \Omega$) est aussi grande que R, on ne peut pas l'oublier.

1.2.2 Partie A. En déduire l'expression de l'inductance L de la bobine et calculer sa valeur (attendue entre 0,95 H et 1,20 H).

Données utiles $R = 12\ \Omega$; $r = 11{,}8\ \Omega$; graphique 1

$L = \tau\,(R + r)$: il faut mesurer τ sur le graphique 1.

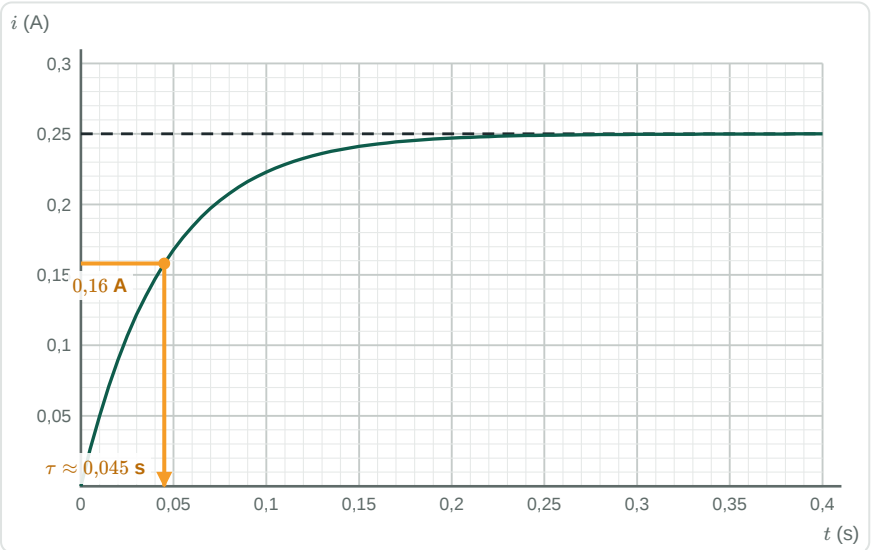
À $t = \tau$, l'intensité vaut 63 % de sa valeur finale : $0{,}63 \times 0{,}25 = 0{,}16$ A.
La courbe passe par cette ordonnée à $\tau \approx 0{,}045$ s.

$$L = 0{,}045 \times (12 + 11{,}8) = 1{,}1\ \text{H}$$

$L = \tau\,(R + r) \approx 1{,}1$ H, valeur bien comprise entre 0,95 H et 1,20 H.

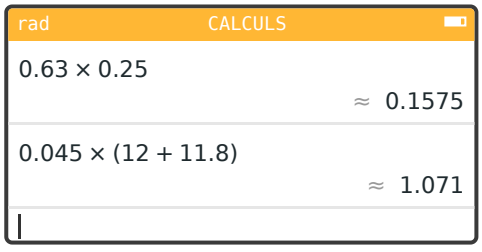
COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs : $R = 12\ \Omega$ et la lecture de τ n'en ont que deux.

MÉTHODE
Autre lecture de τ : la tangente à l'origine coupe l'asymptote $i = 0{,}25$ A à l'abscisse $t = \tau$. La méthode des 63 % est plus précise, car une tangente se trace mal.



1.2.2 · Graphique 1 de l'annexe : lecture de τ à 63 % de la valeur finale

À LA CALCULATRICE



2.1 Partie A. Avec la loi d'additivité des tensions, établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$.

Interrupteur fermé, le courant i circule de A vers C dans la branche bobine-résistance. Additivité des tensions : $E = u_{AB} + u_{BC}$.

- Bobine réelle : $u_{AB} = r\,i + L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
- Conducteur ohmique : $u_{BC} = R\,i$

Donc $E = L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (R+r)\,i$. En divisant par L :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R+r}{L}\,i = \frac{E}{L}}$$

PIÈGE
Oublier le terme $r\,i$ dans la tension aux bornes de la bobine : elle se comporte comme une inductance pure en série avec une résistance r.

2.2 Partie A. Par identification avec l'équation (1), vérifier que $\alpha = \dfrac{R+r}{L}$ et donner l'expression de β.

L'équation (1) s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha\,x = \beta$. Avec $x = i$, on compare terme à terme avec l'équation de 2.1 : α est le coefficient de i, β le second membre.

$$\boxed{\alpha = \frac{R+r}{L} \text{ et } \beta = \frac{E}{L}}$$

2.3 Partie A. En déduire l'équation horaire littérale $i(t)$ en fonction de r, R, L et E. Montrer que cette solution vérifie l'équation établie en 2.1.

Comme $\beta \neq 0$, la solution est la forme (2), avec $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{E}{L} \times \dfrac{L}{R+r} = \dfrac{E}{R+r}$:

$$i(t) = \frac{E}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t}\right)$$

Vérification. On dérive : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{R+r} \times \dfrac{R+r}{L}\,e^{-\frac{R+r}{L}t} = \dfrac{E}{L}\,e^{-\frac{R+r}{L}t}$.

D'autre part : $\dfrac{R+r}{L}\,i = \dfrac{E}{L}\left(1 - e^{-\frac{R+r}{L}t}\right)$.

En additionnant, les deux exponentielles se compensent :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R+r}{L}\,i = \frac{E}{L} \text{ : la solution vérifie bien l'équation de 2.1.}}$$

MÉTHODE
Vérifier une solution : calculer séparément la dérivée et le terme en $\alpha\,i$, puis les ajouter. On doit retrouver le second membre à tout instant t.

2.4 Partie A. Montrer que cette équation horaire peut s'écrire $i(t) = \dfrac{E}{R+r}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$.

D'après 1.2.1, $\tau = \dfrac{L}{R+r}$, donc $\dfrac{R+r}{L} = \dfrac{1}{\tau}$: l'exposant $-\dfrac{R+r}{L}\,t$ s'écrit $-\dfrac{t}{\tau}$.

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R+r}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \text{ avec } \tau = \frac{1}{\alpha}}$$

3.1 Partie A. Donner l'expression littérale de l'intensité I en régime permanent, calculer sa valeur et la comparer à la valeur expérimentale.

Données utiles $E = 6{,}1$ V ; $R = 12\ \Omega$; $r = 11{,}8\ \Omega$

Quand t devient très grand, $-\dfrac{t}{\tau} \to -\infty$ et $e^{-t/\tau} \to 0$: $i(t)$ tend vers $I = \dfrac{E}{R+r}$.

$$I = \frac{6{,}1}{12 + 11{,}8} = 0{,}26 \text{ A}$$

Le palier du graphique 1 se situe à $0{,}25$ A : l'écart est d'environ 3 %.

$I = \dfrac{E}{R+r} = 0{,}26$ A, en accord avec la valeur expérimentale $0{,}25$ A.

COMPRENDRE

En régime permanent, $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$: la bobine ne se comporte plus que comme sa résistance r, d'où $E = (R+r)\,I$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{6.1}{12 + 11.8} \approx 0.2563025$

$\dfrac{0.2563 - 0.25}{0.25} \approx 0.0252$

3.2 Partie A. Donner l'expression littérale de i à la date $t = \tau$ en fonction de I, calculer sa valeur et la comparer à l'expérience.

Données utiles $I = 0{,}26$ A (3.1)

À $t = \tau$: $i(\tau) = I\left(1 - e^{-1}\right) = 0{,}63\,I$.

$$i(\tau) = 0{,}63 \times 0{,}26 = 0{,}16 \text{ A}$$

Sur le graphique 1, à $t = \tau = 0{,}045$ s, on lit aussi $i \approx 0{,}16$ A.

$i(\tau) = 0{,}63\,I = 0{,}16$ A : le modèle théorique est en accord avec l'expérience.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$1 - e^{-1} \approx 0.6321206$

$0.63 \times 0.26 \approx 0.1638$

1.1 Partie B (mécanique). Déterminer la valeur de α et du rapport $\dfrac{\beta}{\alpha}$; donner l'unité de ce rapport.

Données utiles équation (3) : $v(t) = 1{,}14\left(1 - e^{-t/0{,}132}\right)$

On compare (3) à la forme (2), $x(t) = \dfrac{\beta}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$, avec $x = v$:

- facteur devant la parenthèse : $\dfrac{\beta}{\alpha} = 1{,}14$;
- exposant : $\alpha\, t = \dfrac{t}{0{,}132}$, donc $\alpha = \dfrac{1}{0{,}132} = 7{,}58\ \text{s}^{-1}$.

$\alpha = 7{,}58\ \text{s}^{-1}$ et $\dfrac{\beta}{\alpha} = 1{,}14\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

COMPRENDRE

$\dfrac{\beta}{\alpha}$ est la vitesse limite de la bille : c'est le palier de la courbe, vers lequel v tend quand l'exponentielle s'annule.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{1}{0.132} \approx 7.575758$

1.2 Partie B. Montrer que l'équation différentielle dont (3) est solution s'écrit $\frac{dv}{dt} + 7{,}58\,v = 8{,}64$.

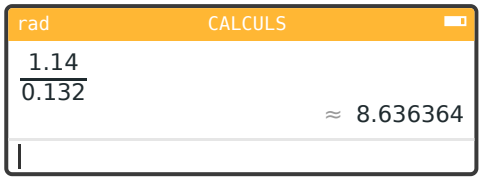
Données utiles $\alpha = 7{,}58\ \text{s}^{-1}$ et $\frac{\beta}{\alpha} = 1{,}14\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (1.1)

(3) est de la forme (2), donc solution de l'équation (1) : $\frac{dv}{dt} + \alpha\,v = \beta$.

$\beta = \frac{\beta}{\alpha} \times \alpha = \frac{1{,}14}{0{,}132} = 8{,}64$ (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$).

$$\frac{dv}{dt} + 7{,}58\,v = 8{,}64$$

À LA CALCULATRICE



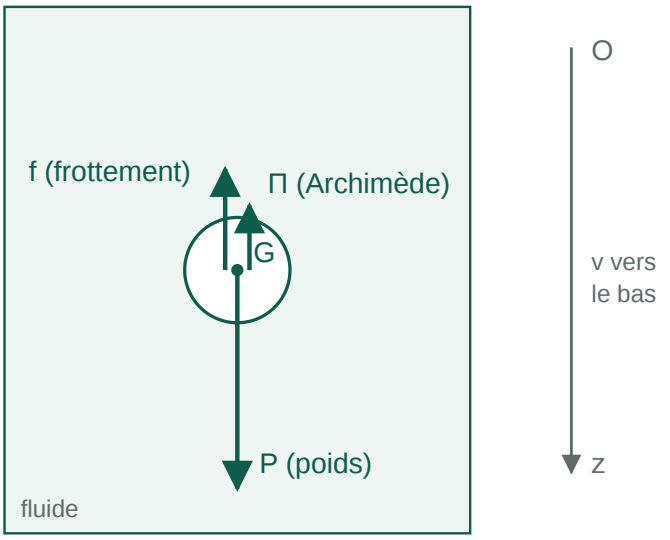
2.1 Partie B. Faire l'inventaire des forces appliquées à la bille et les représenter sur un schéma, au centre d'inertie G.

Système : la bille, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Trois forces verticales :

- le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$, vers le bas ;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$, vers le haut, de valeur $\rho_{\text{fluide}}\,V\,g$ (poids du fluide déplacé) ;
- la force de frottement fluide $\vec{f}$, opposée à la vitesse, donc vers le haut.

Trois forces : $\vec{P}$ (vers le bas), $\vec{\Pi}$ et $\vec{f}$ (vers le haut).

PIÈGE
Oublier la poussée d'Archimède. Dans un liquide elle n'est pas négligeable devant le poids : la question 3.3 le confirme.



2.1 · Forces appliquées à la bille en G, sans souci d'échelle (f et Π décalées pour la lisibilité)

2.2 Partie B. Appliquer au système bille la seconde loi de Newton.

Dans le référentiel terrestre galiléen, la masse m étant constante :

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$$

3.1 Partie B. Avec un axe vertical orienté vers le bas, montrer que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{k}{m}v = \left(1 - \dfrac{\rho_{\text{fluide}}\,V}{m}\right) g$.

Données utiles $\vec{f} = -k\,\vec{v}$

On projette la relation de 2.2 sur l'axe (Oz) orienté vers le bas. La bille descend : $v_z = v$ et $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

$P_z = m\,g$; $\Pi_z = -\rho_{\text{fluide}}\,V\,g$; $f_z = -k\,v$.

$$m\,g - \rho_{\text{fluide}}\,V\,g - k\,v = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

On divise par m et on regroupe les termes en v à gauche :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}v = \left(1 - \frac{\rho_{\text{fluide}}\,V}{m}\right) g}$$

PIÈGE
Les signes : l'axe pointe vers le bas, donc seul le poids a une coordonnée positive. Une erreur de signe sur $\vec{\Pi}$ ou $\vec{f}$ fausse toute l'équation.

3.2 Partie B. En déduire l'expression littérale des coefficients α et β de l'équation (1).

On identifie l'équation de 3.1 avec $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha\,x = \beta$, où $x = v$.

$$\boxed{\alpha = \frac{k}{m} \text{ et } \beta = \left(1 - \frac{\rho_{\text{fluide}}\,V}{m}\right) g}$$

3.3 Partie B. Quelle serait la valeur de β si la poussée d'Archimède était nulle ? Justifier, avec l'équation de 1.2, que cette force doit être prise en compte.

Données utiles $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $\beta = 8{,}64\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ (1.2)

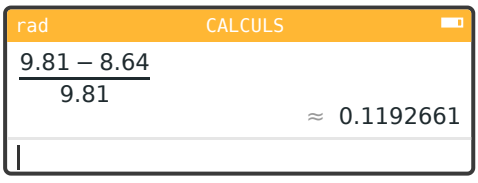
Sans poussée d'Archimède, le terme $\rho_{\text{fluide}}\,V\,g$ disparaît et $\beta = g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Or la modélisation de 1.2 donne $\beta = 8{,}64\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, soit 12 % de moins que g. Cet écart est trop grand pour être négligé.

Sans poussée d'Archimède, $\beta = g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \neq 8{,}64\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$: la poussée d'Archimède doit être prise en compte.

COMPRENDRE
On en tire même sa valeur : $\Pi = m\,(g - \beta) = 0{,}032 \times (9{,}81 - 8{,}64) \approx 0{,}037$ N, à comparer au poids $m\,g \approx 0{,}31$ N.

À LA CALCULATRICE



1.1 Partie C (radioactivité). Montrer par analyse dimensionnelle que la constante radioactive λ est homogène à l'inverse d'un temps.

Données utiles $A(t) = A_0\,e^{-\lambda t}$

L'argument d'une exponentielle est un nombre sans dimension : le produit $\lambda\,t$ n'a donc pas de dimension.

$[\lambda] \times \mathrm{T} = 1$, d'où $[\lambda] = \mathrm{T}^{-1}$.

$[\lambda] = \mathrm{T}^{-1}$: λ est l'inverse d'un temps (ici en min^{-1}).

1.2 Partie C. Rappeler la relation liant λ à la constante de temps τ et exprimer $A(t)$ en fonction de τ.

$\lambda = \dfrac{1}{\tau}$, donc $A(t) = A_0\, e^{-t/\tau}$

1.3 Partie C. Évaluer graphiquement la constante de temps τ et en déduire la valeur de λ.

Données utiles graphique 2 : $A_0 = 300 \times 10^6$ Bq

À $t = \tau$: $A(\tau) = A_0\, e^{-1} = 0{,}37 \times 300 \times 10^6 = 110 \times 10^6$ Bq.

Sur le graphique 2, la courbe atteint cette activité à $\tau \approx 29$ min.

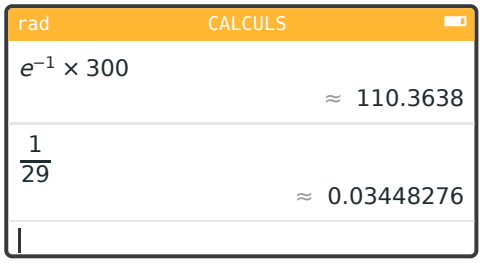
$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{29} = 3{,}4 \times 10^{-2}\ \text{min}^{-1}$$

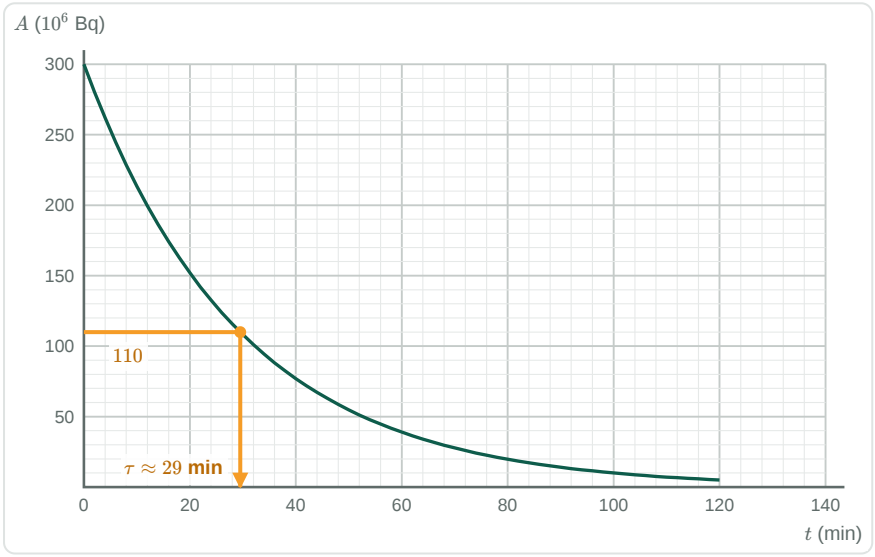
$\tau \approx 29$ min et $\lambda \approx 3{,}4 \times 10^{-2}\ \text{min}^{-1}$, en accord avec la valeur $3{,}40 \times 10^{-2}\ \text{min}^{-1}$ de l'énoncé.

MÉTHODE

On peut aussi tracer la tangente à l'origine : elle coupe l'axe des abscisses à $t = \tau$.

À LA CALCULATRICE





1.3 · Graphique 2 de l'annexe : lecture de τ pour $A = 0{,}37\, A_0$

1.4 Partie C. Définir le temps de demi-vie $t_{1/2}$ et le déterminer graphiquement.

Le temps de demi-vie est la durée au bout de laquelle l'activité de l'échantillon est divisée par deux : $A(t_{1/2}) = \dfrac{A_0}{2}$.

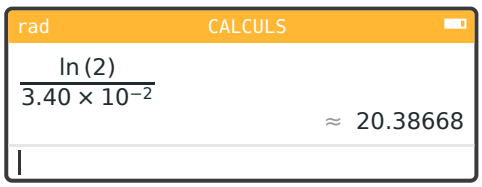
Ici $\dfrac{A_0}{2} = 150 \times 10^6$ Bq : la courbe du graphique 2 passe par cette valeur à $t \approx 20$ min.

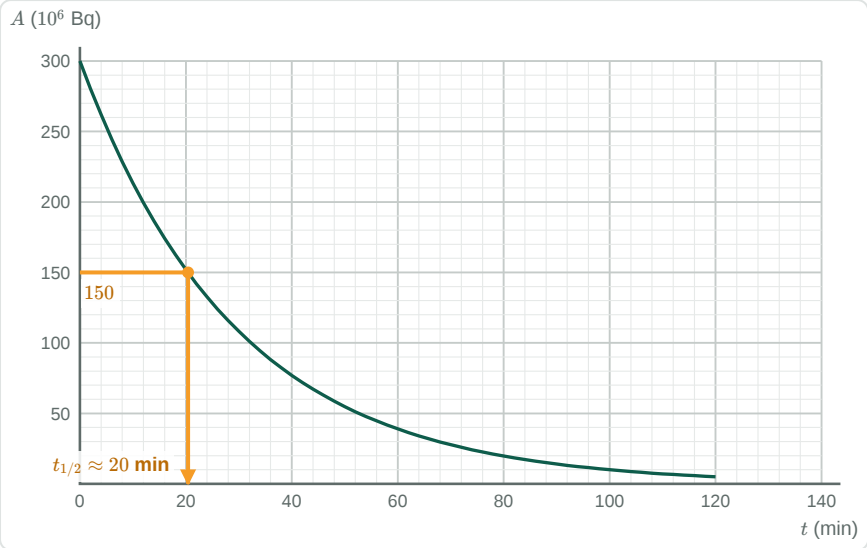
$t_{1/2} \approx 20$ min

COMPRENDRE

Contrôle par le calcul : $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2$, soit 20,4 min avec la valeur de λ donnée. La lecture graphique est cohérente.

À LA CALCULATRICE





1.4 · Graphique 2 de l'annexe : lecture de $t_{1/2}$ pour $A = A_0/2$

2 Partie C. Exploiter la relation d'Euler pour établir la relation liant $A(t+\Delta t)$, $A(t)$, λ et Δt.

Données utiles $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + \lambda\, A(t) = 0$; $x(t+\Delta t) = x(t) + \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Delta t$

Avec $x = A$: $A(t+\Delta t) = A(t) + \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\,\Delta t$.

L'équation différentielle donne $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\lambda\, A(t)$, donc $A(t+\Delta t) = A(t) - \lambda\, A(t)\,\Delta t$.

$$A(t+\Delta t) = A(t)\,(1 - \lambda\,\Delta t)$$

COMPRENDRE
À chaque pas, l'activité est multipliée par le même facteur $1 - \lambda\,\Delta t$: les valeurs d'Euler forment une suite géométrique.

3.1 Partie C. Justifier que la valeur $\Delta t = 15$ min n'est pas correctement adaptée à l'étude.

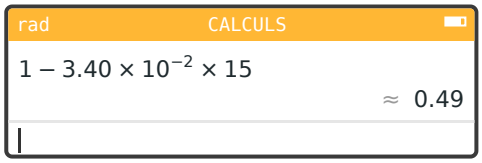
Données utiles $t_{1/2} \approx 20$ min (1.4) ; $\tau \approx 29$ min (1.3) ; $\lambda = 3{,}40 \times 10^{-2}\ \mathrm{min}^{-1}$

La méthode d'Euler suppose que la dérivée reste presque constante pendant un pas : il faut Δt très petit devant la durée caractéristique du phénomène.

Or $\Delta t = 15$ min est du même ordre que $t_{1/2} \approx 20$ min et que $\tau \approx 29$ min. En un seul pas, l'activité serait multipliée par $1 - \lambda\,\Delta t = 0{,}49$.

$\Delta t = 15$ min n'est pas petit devant τ (ni devant $t_{1/2}$) : ce pas est trop grand.

À LA CALCULATRICE



3.2 Partie C. Avec un pas $\Delta t = 5$ min, compléter le tableau comparant la méthode d'Euler et l'équation théorique (4).

Données utiles $A_0 = 3{,}00 \times 10^8$ Bq ; $\lambda = 3{,}40 \times 10^{-2}$ min^{-1}

Euler, à $t = 5$ min : $A(5) = A_0\,(1 - \lambda\,\Delta t) = 3{,}00 \times 10^8 \times (1 - 3{,}40 \times 10^{-2} \times 5) = 2{,}49 \times 10^8$ Bq.

Théorie, à $t = 10$ min : $A(10) = A_0\,e^{-\lambda t} = 3{,}00 \times 10^8 \times e^{-3{,}40 \times 10^{-2} \times 10} = 2{,}14 \times 10^8$ Bq.

Date (min)	A_{Euler} (Bq)	$A_{\text{théorique}}$ (Bq)
0	$3{,}00 \times 10^8$	$3{,}00 \times 10^8$
5	$\mathbf{2{,}49 \times 10^8}$	$2{,}53 \times 10^8$
10	$2{,}07 \times 10^8$	$\mathbf{2{,}14 \times 10^8}$
15	$1{,}72 \times 10^8$	$1{,}80 \times 10^8$

$A_{\text{Euler}}(5\text{ min}) = 2{,}49 \times 10^8$ Bq et $A_{\text{théorique}}(10\text{ min}) = 2{,}14 \times 10^8$ Bq

MÉTHODE
Contrôle : en appliquant un pas de plus à $2{,}49 \times 10^8$ Bq, on doit retomber sur la valeur $2{,}07 \times 10^8$ Bq déjà inscrite dans le tableau.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$3.00 \times 10^8 \times (1 - 3.40 \times 10^{-2} \times 5) \approx 2.49 \times 10^8$

$3.00 \times 10^8 \times e^{(-3.40 \times 10^{-2}) \times 10} \approx 2.135311 \times 10^8$

$2.49 \times 10^8 \times (1 - 3.40 \times 10^{-2} \times 5) \approx 2.0667 \times 10^8$

3.3 Partie C. Le choix de Δt est pertinent si l'écart relatif entre A_{Euler} et $A_{\text{théorique}}$ est inférieur à 5 %. Le pas $\Delta t = 5$ min est-il adapté ?

Données utiles tableau complété (3.2)

Écart relatif : $\dfrac{A_{\text{théorique}} - A_{\text{Euler}}}{A_{\text{théorique}}}$.

- à 5 min : $\dfrac{2{,}53 - 2{,}49}{2{,}53} = 1{,}6\ \%$;
- à 10 min : $\dfrac{2{,}14 - 2{,}07}{2{,}14} = 3{,}3\ \%$;
- à 15 min : $\dfrac{1{,}80 - 1{,}72}{1{,}80} = 4{,}4\ \%$.

Tous les écarts sont inférieurs à 5 % : le pas $\Delta t = 5$ min est adapté sur la durée étudiée.

COMPRENDRE
L'écart grandit à chaque pas, car les erreurs s'accumulent. Le critère est respecté jusqu'à 15 min ; pour suivre l'activité plus longtemps, il faudrait réduire le pas.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{2.53 - 2.49}{2.53} \approx 0.01581028$

$\dfrac{2.14 - 2.07}{2.14} \approx 0.03271028$

$\dfrac{1.80 - 1.72}{1.80} \approx 0.04444444$