Un Rubik's Cube résolu à près de 4300 m d'altitude

Bac S 2011 Amérique du Sud (ancien programme) · Exercice 3 **6,5 points** **Durée conseillée 1 h 18**

1.1.1 À l'aide du document 1, calculer la vitesse v à la date $t = 7$ s, puis compléter le graphe du document 2.

Données utiles positions relevées toutes les $\Delta t = 1{,}0$ s ; échelle du document 1 : 1 cm pour 20 m

La vitesse à la date t_7 est assimilée à la vitesse moyenne entre les dates voisines t_6 et t_8 :

$$v_7 = \frac{G_6G_8}{t_8 - t_6} = \frac{G_6G_8}{2\,\Delta t}$$

Sur le document 1, on mesure $G_6G_8 = 5{,}2$ cm, soit une distance réelle $G_6G_8 = 5{,}2 \times 20 = 104$ m.

$$v_7 = \frac{104}{2 \times 1{,}0} = 52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

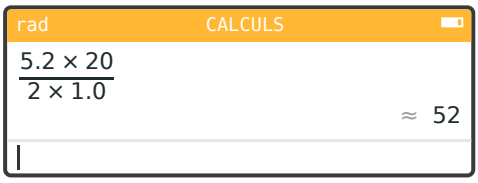
On place le point $(7 \text{ s} ; 52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$ sur le document 2 (voir la figure de la question 1.2.3).

$v_7 = 52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

PIÈGE
Diviser par Δt au lieu de $2\,\Delta t$, ou oublier l'échelle : la distance mesurée en centimètres doit être convertie en mètres réels avant le calcul.

COMPRENDRE
La longueur mesurée à la règle (5,2 cm) n'a que deux chiffres significatifs : la vitesse en garde deux. Le point obtenu s'aligne bien entre ceux de $t = 6$ s et $t = 8$ s, ce qui valide la mesure.

À LA CALCULATRICE



1.1.2 Représenter sur le document 1 le vecteur vitesse du centre d'inertie à la date $t = 7$ s (échelle : 1 cm pour $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Données utiles $v_7 = 52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (1.1.1)

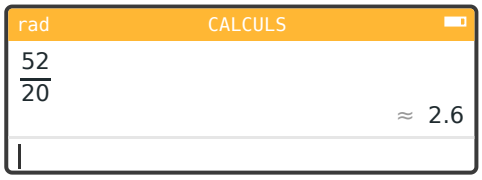
Le vecteur $\vec{v}_7$ a pour origine le point G_7 ; il est tangent à la trajectoire, donc vertical, et dirigé dans le sens du mouvement, vers le bas.

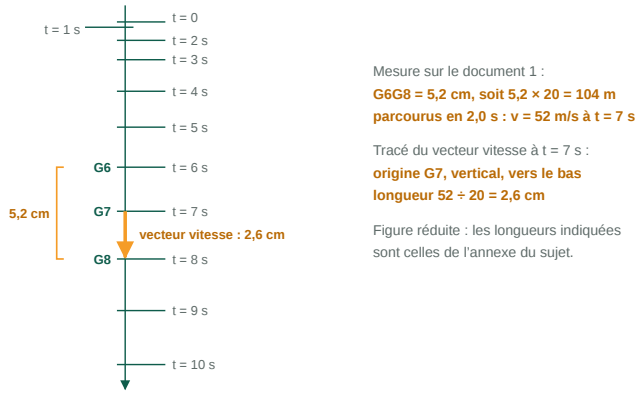
Sa longueur sur le dessin est $\frac{52}{20} = 2{,}6$ cm.

Flèche verticale vers le bas, d'origine G_7, de longueur 2,6 cm.

PIÈGE
Deux échelles coexistent sur le document 1 : 1 cm pour 20 m (distances) et 1 cm pour $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (vitesses). La flèche se trace avec la seconde.

À LA CALCULATRICE





1.1.2 · Document 1 de l'annexe complété : mesure de G6G8 et vecteur vitesse à la date t = 7 s (la pointe arrive juste avant G8)

1.2.1 Sans frottement ni poussée d'Archimède, donner la relation entre le vecteur accélération du centre d'inertie et le vecteur poids, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Justifier.

Système : {parachutiste + bateau}, de masse m ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : le poids $\vec{P}$ uniquement, puisque les frottements de l'air et la poussée d'Archimède sont négligés.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, donc

$$\boxed{\vec{P} = m\,\vec{a}}$$

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel, bilan des forces, puis la loi. La justification demandée est ce bilan réduit au seul poids.

1.2.2 Établir que l'expression théorique de la vitesse en fonction du temps est $v = g\,t$.

Comme $\vec{P} = m\,\vec{g}$, la relation précédente donne $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, soit $\vec{a} = \vec{g}$.

On projette sur un axe vertical (Oz) orienté vers le bas : $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = g$.

Par intégration : $v_z(t) = g\,t + C$, où C est une constante.

Condition initiale : la chute se fait sans vitesse initiale, $v_z(0) = 0$, donc $C = 0$.

Ainsi $v_z = g\,t$; cette composante étant positive, la valeur de la vitesse est $v = v_z$.

$$\boxed{v = g\,t}$$

PIÈGE
Oublier la constante d'intégration : c'est la condition initiale $v_z(0) = 0$, donnée par l'énoncé, qui permet de l'annuler. Elle doit apparaître sur la copie.

1.2.3 Tracer sur le graphique du document 2 la courbe théorique représentant la fonction $v(t)$ établie à la question 1.2.2.

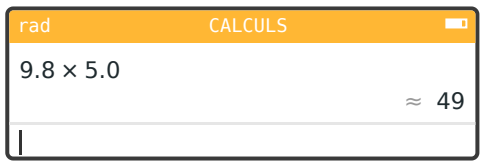
Données utiles $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

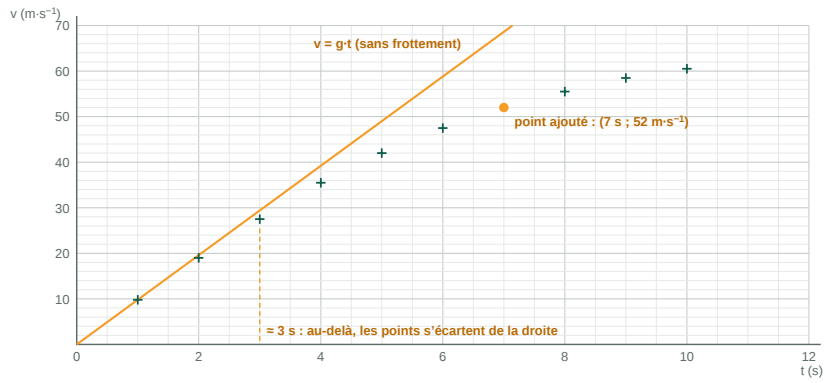
$v = g\,t$ est une fonction linéaire : sa représentation est une droite passant par l'origine, de coefficient directeur $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Second point pour la tracer : à $t = 5{,}0$ s, $v = 9{,}8 \times 5{,}0 = 49\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Droite passant par $(0\ ;\ 0)$ et $(5{,}0\ \mathrm{s}\ ;\ 49\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})$.

À LA CALCULATRICE





1.2.3 · Document 2 de l'annexe complété : point à t = 7 s et droite théorique v = g·t

1.2.4 À l'aide du graphique du document 2, établir jusqu'à quelle date on peut raisonnablement négliger les frottements de l'air.

Les trois premiers points sont pratiquement sur la droite théorique. Au-delà, ils passent nettement sous la droite et l'écart ne cesse de grandir.

Les frottements de l'air peuvent être négligés jusqu'à $t \approx 3$ s.

COMPRENDRE
La force de frottement varie comme v^2 : presque nulle au départ, elle grandit vite avec la vitesse. Une réponse entre 2 s et 3 s est acceptable si elle est justifiée par le graphique.

2.1 Écrire la deuxième loi de Newton appliquée au système « parachutiste + bateau » dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

Le système {parachutiste + bateau}, de masse m, est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la force de frottement de l'air $\vec{F}_1$ (poussée d'Archimède négligée).

$\vec{P} + \vec{F}_1 = m\,\vec{a}$

COMPRENDRE
En projection sur un axe vertical orienté vers le bas, cette relation s'écrit $m\,g - k_1\,v^2 = m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$: le poids entraîne, le frottement freine.

2.2.1 Que peut-on dire du vecteur accélération lorsque v devient constante ?

Le mouvement est rectiligne : si la valeur de la vitesse est constante, le vecteur $\vec{v}$ est constant et $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ est nul.

$\vec{a} = \vec{0}$: le mouvement est rectiligne uniforme.

2.2.2 Donner alors la relation entre les forces $\vec{P}$ et $\vec{F}_1$. Justifier.

On reporte $\vec{a} = \vec{0}$ dans la deuxième loi de Newton écrite en 2.1 : $\vec{P} + \vec{F}_1 = \vec{0}$.

$\vec{F}_1 = -\vec{P}$: les deux forces se compensent (même direction, sens opposés, même valeur).

2.2.3 Calculer la vitesse limite v_1 et vérifier le résultat sur la courbe 1.

Données utiles $m = 75$ kg ; $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $k_1 = 0{,}165\ \mathrm{kg \cdot m^{-1}}$

Les forces ont la même valeur : $F_1 = P$, soit $k_1\,v_1^2 = m\,g$. La vitesse étant positive :

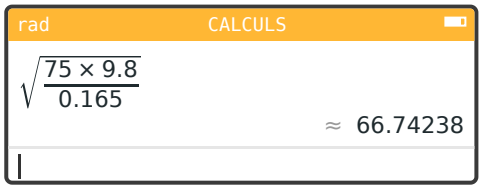
$$v_1 = \sqrt{\frac{m\,g}{k_1}} = \sqrt{\frac{75 \times 9{,}8}{0{,}165}} = 67\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Vérification : sur la courbe 1, le premier palier de vitesse (entre 20 s et 37 s environ) se situe un peu au-dessous de $70\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, ce qui est en accord avec la valeur calculée.

$v_1 = 67\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

COMPRENDRE
Unités : $\dfrac{m\,g}{k_1}$ est en $\dfrac{\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}}{\mathrm{kg \cdot m^{-1}}} = \mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$; la racine est bien une vitesse. Le sujet utilise ensuite la valeur moins arrondie $66{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

À LA CALCULATRICE



2.2.4 Justifier, par un raisonnement qualitatif, l'augmentation de la valeur de la vitesse constatée sur la courbe 1 au moment du largage du bateau.

Le coefficient de frottement s'écrit $k = \frac{1}{2}\rho S$. En quittant le bateau, le parachutiste présente à l'air une surface S plus petite : k diminue.

À la vitesse v_1, la force $F = k\,v^2$ devient donc inférieure au poids, inchangé. L'accélération est alors dirigée vers le bas : la vitesse augmente jusqu'à ce que le frottement compense à nouveau le poids.

Surface S plus petite, donc k plus petit : la nouvelle vitesse limite $\sqrt{\frac{m\,g}{k}}$ est plus grande.

3.1 Calculer l'énergie mécanique E_1 du système « parachutiste + Terre » au moment de la sortie de l'avion.

Données utiles $m = 75$ kg ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; altitude initiale $z_1 = 4300$ m ; vitesse initiale nulle

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur, nulle au niveau du sol ($z = 0$) :

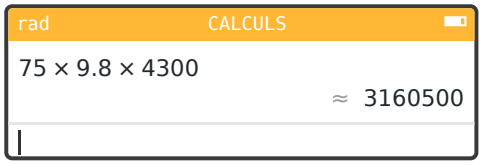
$$E_m = \frac{1}{2}m\,v^2 + m\,g\,z$$

À la sortie de l'avion, $v = 0$, donc $E_1 = m\,g\,z_1$.

$$E_1 = 75 \times 9{,}8 \times 4300 = 3{,}2 \times 10^6\ \text{J}$$

$E_1 = 3{,}2 \times 10^6$ J

À LA CALCULATRICE



3.2 Calculer l'énergie mécanique E_2 du système juste avant le largage du bateau, à l'altitude de 2200 m.

Données utiles $z_2 = 2200$ m ; $v_2 = 66{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $m = 75$ kg ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

$$E_2 = \frac{1}{2}m\,v_2^2 + m\,g\,z_2$$

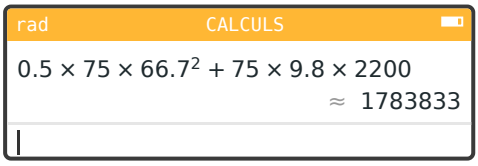
$$E_2 = \frac{1}{2} \times 75 \times 66{,}7^2 + 75 \times 9{,}8 \times 2200 = 1{,}7 \times 10^5 + 1{,}62 \times 10^6$$

$E_2 = 1{,}8 \times 10^6$ J

PIÈGE

Oublier le carré de la vitesse ou le facteur $\frac{1}{2}$. L'énergie cinétique ne représente ici qu'un dixième environ de l'énergie mécanique : l'essentiel reste de l'énergie potentielle.

À LA CALCULATRICE



3.3 Pourquoi l'énergie mécanique a-t-elle diminué ?

Données utiles $E_1 = 3{,}2 \times 10^6$ J (3.1) ; $E_2 = 1{,}8 \times 10^6$ J (3.2)

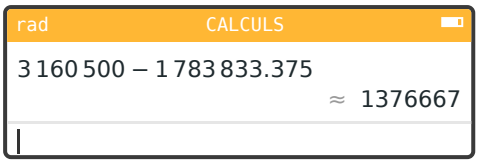
Le système est soumis à la force de frottement de l'air, force non conservative dont le travail est négatif (elle s'oppose au mouvement). L'énergie mécanique ne se conserve donc pas : elle diminue de $E_1 - E_2 \approx 1{,}4 \times 10^6$ J.

L'énergie perdue est dissipée par les frottements de l'air, sous forme de transfert thermique.

COMPRENDRE

La variation d'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives : $\Delta E_m = W(\vec{F}_1) < 0$. Le poids, force conservative, est déjà pris en compte dans l'énergie potentielle.

À LA CALCULATRICE



3.4.1 Si la tentative s'était déroulée en l'absence d'atmosphère, le parachutiste pourrait-il être freiné ? Pourquoi ?

Sans air, aucune force de frottement ne s'exerce, même parachute ouvert. La seule force est le poids, dirigé dans le sens du mouvement.

Non : sans air, rien ne peut freiner le parachutiste, sa vitesse augmente jusqu'au sol.

3.4.2 En l'absence d'atmosphère, que pourrait-on dire de l'énergie mécanique du système ?

Le système ne serait soumis qu'au poids, force conservative.

L'énergie mécanique se conserverait : elle garderait la valeur E_1 pendant toute la chute.

3.4.3 Quelle aurait été, dans ces conditions, la vitesse du parachutiste à l'altitude 2200 m ?

Données utiles $z_1 = 4300$ m ; $z_2 = 2200$ m ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; vitesse initiale nulle

Conservation de l'énergie mécanique entre l'altitude z_1 (vitesse nulle) et l'altitude z_2 (vitesse v) :

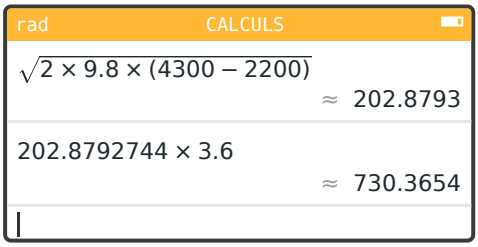
$$m\,g\,z_1 = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,z_2 \quad \text{donc} \quad v = \sqrt{2\,g\,(z_1 - z_2)}$$

$$v = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times (4300 - 2200)} = 2{,}0 \times 10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$v = 2{,}0 \times 10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (environ $730\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$)

MÉTHODE
Simplifier par m avant de calculer : le résultat ne dépend pas de la masse et l'on évite de réutiliser la valeur arrondie de E_1, qui fausserait le dernier chiffre.

À LA CALCULATRICE



3.5 Le sport pratiqué par M. Fichte est communément appelé « chute libre ». Ce terme semble-t-il conforme à la situation étudiée ? Justifier.

En physique, une chute est libre lorsque le système n'est soumis qu'à son poids. Ici, ce n'est vrai que pendant les trois premières secondes environ (1.2.4). Ensuite, le frottement de l'air finit par compenser le poids : la vitesse plafonne à $66{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ au lieu d'environ $200\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ à 2200 m (3.4.3).

Non : au sens du physicien, il ne s'agit pas d'une chute libre, sauf au tout début du saut.