Les oscillateurs mécaniques

Bac S 2005 Amérique du Sud (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Partie A (pendule simple). Donner l'expression de l'énergie cinétique en G.

Système : la masse ponctuelle m, étudiée dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En G, elle possède la vitesse v.

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

COMPRENDRE
m s'exprime en kg et v en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pour obtenir E_C en joules. La vitesse v est celle du point G à l'instant considéré : elle change tout au long de l'oscillation.

1.2 Partie A. Avec $E_P = m\,g\,L\,(1-\cos\beta)$, donner l'expression de l'énergie mécanique en fonction de m, g, L, v et β. Pourquoi l'énergie mécanique se conserve-t-elle ?

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur : $E_m = E_C + E_P$.

La masse est soumise à son poids et à la tension du fil. La tension reste perpendiculaire à la trajectoire : son travail est nul. Les frottements sont négligés. Seul le poids, force conservative, travaille : l'énergie mécanique se conserve.

$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + m\,g\,L\,(1-\cos\beta)$, constante au cours du mouvement.

PIÈGE
Répondre seulement « parce que le sujet le dit ». La justification attendue est physique : pas de frottements, et la tension du fil ne travaille pas.

COMPRENDRE
L'altitude de G au-dessus de G_0 vaut $z = L - L\cos\beta$, d'où l'expression de $E_P = m\,g\,z$ donnée par le sujet.

1.3 Partie A. Exprimer la vitesse au passage par la position d'équilibre en fonction de g, L et β_m. Calculer sa valeur.

Données utiles $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $L = 1{,}0\ \mathrm{m}$; $\cos\beta_m = 0{,}95$

L'énergie mécanique a la même valeur en G_i et en G_0.

En G_i : vitesse nulle et $\beta = \beta_m$, donc $E_m(G_i) = m\,g\,L\,(1-\cos\beta_m)$.

En G_0 : $\beta = 0$ donc $E_P = 0$, et la vitesse vaut v_0 : $E_m(G_0) = \frac{1}{2} m v_0^2$.

L'égalité $\frac{1}{2} m v_0^2 = m\,g\,L\,(1-\cos\beta_m)$ donne, après simplification par m :

$$v_0 = \sqrt{2\,g\,L\,(1-\cos\beta_m)}$$

$$v_0 = \sqrt{2 \times 10 \times 1{,}0 \times (1-0{,}95)} = \sqrt{20 \times 0{,}050} = \sqrt{1{,}0}$$

$$v_0 = \sqrt{2\,g\,L\,(1-\cos\beta_m)} = 1{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme les données. La masse disparaît du résultat : deux pendules de même longueur lâchés du même angle passent à la verticale avec la même vitesse.

MÉTHODE
Sans calculatrice, regrouper les facteurs avant la racine : $2 \times 10 = 20$, puis $20 \times 0{,}050 = 1{,}0$. Les valeurs d'un sujet sans calculatrice sont choisies pour que la racine tombe juste.

2.1 Partie A. Énoncer la loi d'isochronisme des petites oscillations.

Pour des oscillations de faible amplitude, la période du pendule simple ne dépend pas de l'amplitude β_m.

COMPRENDRE
« Isochrone » signifie « de même durée ». Lâché de 5° ou de 10°, le pendule met le même temps pour un aller-retour. Aux grandes amplitudes, la période augmente avec β_m.

2.2 Partie A. Choisir l'expression correcte de la période parmi les quatre proposées, en justifiant par une analyse dimensionnelle.

Dimensions : $[T_0] = \mathrm{T}$; $[L] = \mathrm{L}$; $[m] = \mathrm{M}$; $[g] = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$ (accélération). Le facteur 2π et l'angle β_m sont sans dimension.

- $\sqrt{g/L}$: $\left(\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}\cdot\mathrm{L}^{-1}\right)^{1/2} = \mathrm{T}^{-1}$, l'inverse d'une durée : ne convient pas.
- $\sqrt{\beta_m/L}$: $\mathrm{L}^{-1/2}$: ne convient pas.
- $\sqrt{L/g}$: $\left(\mathrm{L}\cdot\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{T}^{2}\right)^{1/2} = \mathrm{T}$, une durée : convient.
- $\sqrt{m/L}$: $\mathrm{M}^{1/2}\cdot\mathrm{L}^{-1/2}$: ne convient pas.

$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ est la seule expression homogène à une durée.

PIÈGE
Ne pas confondre la longueur L du fil et le symbole L de la dimension « longueur ». L'analyse dimensionnelle ne dit rien du facteur 2π, qui est un nombre pur.

MÉTHODE
On peut raisonner avec les unités : g en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ et L en m donnent L/g en s^2, donc une racine en secondes. Tester les quatre expressions, pas seulement la bonne.

1.1 Partie B (oscillateur élastique). Reproduire le schéma du dispositif. Représenter et nommer les forces s'exerçant sur le solide (S), en G, sans souci d'échelle.

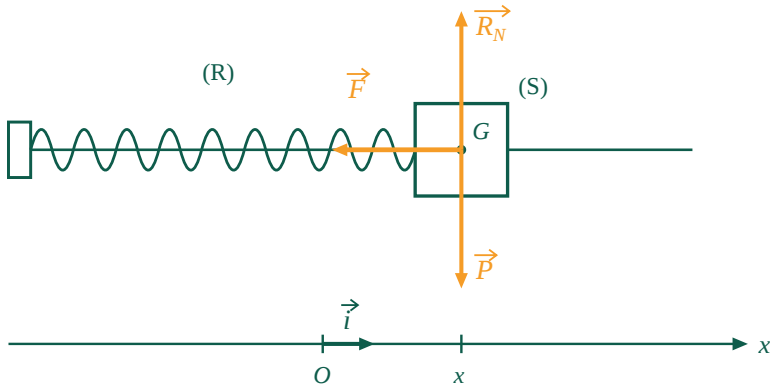
Système : le solide (S), dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à trois forces :

- son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$, vertical, vers le bas ;
- la réaction de la tige $\vec{R}_N$, verticale et vers le haut, puisqu'il n'y a pas de frottements ;
- la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$, horizontale, dirigée vers O.

Trois forces : $\vec{P}$, $\vec{R}_N$ et $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$ (schéma ci-contre).

PIÈGE
Dessiner $\vec{F}$ dans le sens de l'étirement. C'est une force de rappel : elle ramène toujours le solide vers O, donc vers la gauche quand $x > 0$.

COMPRENDRE
L'oscillateur masse-ressort ne figure plus au programme actuel de spécialité. Cette partie reste un bon entraînement à la deuxième loi de Newton et à la conservation de l'énergie.



1.1 · Solide (S) écarté vers les x positifs : les trois forces appliquées en G

1.2 Partie B. En appliquant la deuxième loi de Newton au solide (S), établir l'équation différentielle régissant le mouvement de son centre d'inertie G.

Deuxième loi de Newton, la masse m étant constante : $\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F} = m\,\vec{a}_G$.

Projection sur l'axe (Ox) : $\vec{P}$ et $\vec{R}_N$ sont verticaux, leur projection est nulle. Il reste :

$$-k\,x = m\,a_x = m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » de la force de rappel. Avec $+k\,x$, l'équation obtenue décrit un solide qui s'éloigne indéfiniment de O, et non des oscillations.

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel, bilan des forces, loi vectorielle, puis projection sur l'axe du mouvement. Sur la verticale, la projection donne $R_N = P$.

1.3 Partie B. À partir de la solution $x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi\, t}{T_0} + \varphi\right)$, retrouver l'expression de la période T_0 en fonction de m et de k.

On dérive deux fois la solution proposée :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -X_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi\, t}{T_0} + \varphi\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -X_m \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi\, t}{T_0} + \varphi\right) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x$$

On reporte dans l'équation différentielle : $\left[\frac{k}{m} - \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\right] x = 0$ à chaque instant, ce qui impose $\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{k}{m}$.

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

PIÈGE
En dérivant $\cos(a\, t + \varphi)$, le facteur $a = 2\pi/T_0$ sort à chaque dérivation : il apparaît donc au carré dans la dérivée seconde.

COMPRENDRE
L'enregistrement donne $T_0 = 1{,}0$ s (deux périodes en 2,0 s), et la condition initiale $x(0) = X_m$ donne $\varphi = 0$. La période ne dépend ni de l'amplitude ni de g.

2.1 Partie B. Donner l'expression littérale de l'énergie mécanique du système {ressort + solide} en fonction de k, m, x et de sa dérivée première.

L'énergie potentielle de pesanteur est nulle par choix de l'origine. Il reste l'énergie potentielle élastique $E_{pe} = \frac{1}{2}\, k\, x^2$ et l'énergie cinétique $E_C = \frac{1}{2}\, m\, v^2$.

Le mouvement se fait le long de l'axe (Ox), donc $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}\, m \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}\, k\, x^2}$$

COMPRENDRE
L'énergie E_{pe} est nulle quand le ressort n'est ni étiré ni comprimé ($x = 0$). Elle dépend de x^2 : elle est la même pour un étirement et pour une compression de même valeur.

2.2 Partie B. À partir de l'enregistrement, trouver pour quelles dates l'énergie potentielle élastique du système est maximale. Que vaut alors l'énergie cinétique ?

Données utiles enregistrement de $x(t)$: $X_m = 0{,}10$ m ; $T_0 = 1{,}0$ s

$E_{pe} = \frac{1}{2}\, k\, x^2$ est maximale quand $|x|$ est maximale, c'est-à-dire quand $x = +X_m$ ou $x = -X_m$.

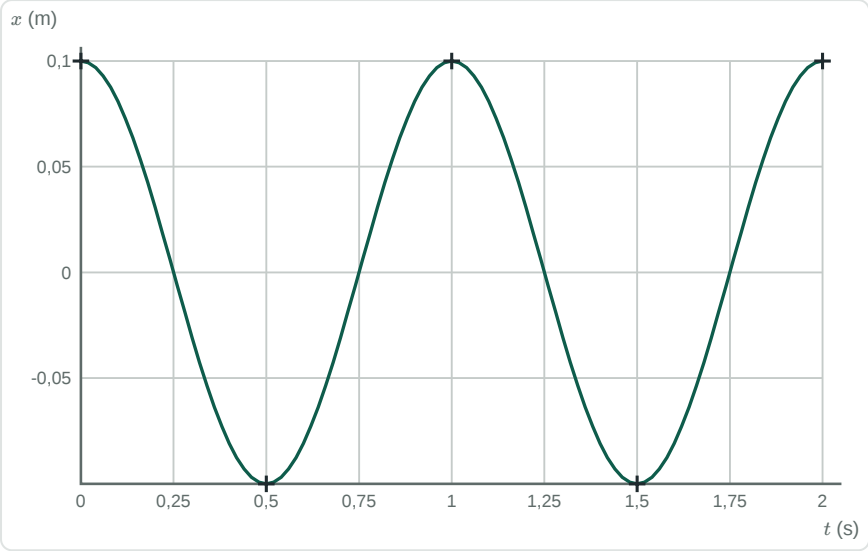
Sur la courbe, cela se produit aux dates $t = 0$; 0,50 ; 1,0 ; 1,5 et 2,0 s, soit toutes les demi-périodes.

À ces dates, la tangente à la courbe est horizontale : $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$, la vitesse est nulle.

E_{pe} est maximale à $t = 0$; 0,50 ; 1,0 ; 1,5 ; 2,0 s, et l'énergie cinétique est alors nulle : $E_C = 0$ J.

PIÈGE
Ne retenir que les maximums de x ($t = 0$; 1,0 ; 2,0 s). Les minimums $x = -X_m$ comptent aussi, car l'énergie élastique dépend de x^2.

COMPRENDRE
Sans frottements, E_m est constante : quand E_{pe} est maximale, E_C est minimale. Le solide s'arrête un instant avant de repartir dans l'autre sens.



2.2 · Enregistrement du sujet : les croix repèrent les dates où $|x| = X_m$

2.3 Partie B. Calculer la valeur de l'énergie mécanique du système.

Données utiles $k = 4{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$; $X_m = 10\ \text{cm} = 0{,}10\ \text{m}$; $E_C = 0$ quand $x = X_m$ (Q2.2)

L'énergie mécanique se conserve (pas de frottements) : on la calcule à $t = 0$, où $x = X_m$ et $E_C = 0$.

$$E_m = \frac{1}{2} k X_m^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} \times 4{,}0 \times (0{,}10)^2 = 2{,}0 \times 1{,}0 \times 10^{-2}$$

$E_m = 2{,}0 \times 10^{-2}$ J, soit 20 mJ.

PIÈGE
Laisser l'amplitude en centimètres : $\frac{1}{2} \times 4{,}0 \times 10^2$ donnerait 200 « J ». Avec k en $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, X_m doit être en mètres.

MÉTHODE
Pour calculer une énergie qui se conserve, choisir l'instant où un seul terme est non nul et connu. La masse m, non donnée, n'est alors pas nécessaire.

C Partie C. Les deux pendules sont envisagés sur la Lune. Pour chacun, choisir l'hypothèse correcte : T_0 ne varie pas, T_0 augmente ou T_0 diminue. Justifier.

Données utiles $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ (partie A, Q2.2) ; $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (partie B, Q1.3)

Sur la Lune, l'intensité de la pesanteur g est plus faible que sur la Terre (environ six fois).

Pendule simple : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. La longueur L est inchangée et g diminue, donc T_0 augmente.

Oscillateur élastique : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Cette période ne dépend pas de g ; la masse m et la raideur k sont les mêmes sur la Lune, donc T_0 ne change pas.

Pendule simple : hypothèse 2 (T_0 augmente). Oscillateur élastique : hypothèse 1 (T_0 ne varie pas).

PIÈGE
Affirmer que « tout est plus lent sur la Lune ». Seul l'oscillateur dont la période contient g est modifié : il faut revenir aux deux expressions de T_0.

COMPRENDRE
La masse ne dépend pas du lieu, contrairement au poids. Avec g six fois plus faible, la période du pendule simple est multipliée par $\sqrt{6} \approx 2{,}4$.