Evolution temporelle de deux oscillateurs

Bac S 2003 Liban (ancien programme) · Exercice 3 **9 points** **Durée conseillée 1 h 57**

1 Partie A. Pour chacun des trois enregistrements, indiquer la condition de fonctionnement de la soufflerie (a, b ou c) et le régime d'évolution.

La soufflerie crée un coussin d'air sous le solide : plus elle est puissante, plus les frottements sont faibles, donc moins les oscillations sont amorties.

- Enregistrement 3 : amplitude constante, aucun amortissement, donc soufflerie à puissance maximale (a).
- Enregistrement 1 : oscillations dont l'amplitude décroît, amortissement faible, donc puissance légèrement diminuée (b).
- Enregistrement 2 : retour à l'équilibre sans aucune oscillation, amortissement fort, donc puissance fortement diminuée (c).

Enregistrement 1 : (b), pseudo-périodique ; enregistrement 2 : (c), apériodique ; enregistrement 3 : (a), périodique.

PIÈGE
Associer « puissance maximale » à l'enregistrement le plus amorti. La soufflerie ne freine pas le solide : elle le soulève et supprime le frottement sur la table.

COMPRENDRE
L'oscillateur masse-ressort n'est plus au programme actuel de spécialité. La deuxième loi de Newton, l'analyse dimensionnelle et l'énergie mécanique utilisées dans cette partie restent, elles, des outils du programme.

2 Partie A, frottements négligeables. a) Représenter et nommer les forces sur S. b) Établir l'équation différentielle. c) Nommer et déterminer X_M et Φ_0. d) Déterminer T_0. e) Choisir l'expression de T_0 par analyse dimensionnelle, puis calculer k.

Données utiles $m = 100$ g ; à $t = 0$: $x = 10{,}0$ cm et vitesse nulle

a) Système : solide S ; référentiel terrestre supposé galiléen. Trois forces s'exercent sur S (schéma ci-dessous) :

- le poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas ;
- la réaction $\vec{R}$ du support (action du coussin d'air), verticale, vers le haut ;
- la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$, horizontale, dirigée vers O.

$\vec{P}$ (poids), $\vec{R}$ (réaction du support), $\vec{F}$ (force de rappel du ressort).

b) Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}$.

Le mouvement de G est horizontal : $\vec{P}$ et $\vec{R}$ se compensent. En projection sur l'axe $(O, \vec{i})$, avec $a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$:

$$-k\,x = m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + k\,x = 0$$

c) X_M est l'amplitude des oscillations ; Φ_0 est la phase à l'origine des dates.

Vitesse : $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -X_M\,\dfrac{2\pi}{T_0}\,\sin\left(\dfrac{2\pi t}{T_0} + \Phi_0\right)$.

À $t = 0$: $v(0) = 0$ impose $\sin\Phi_0 = 0$, donc $\Phi_0 = 0$ ou $\Phi_0 = \pi$.

De plus $x(0) = X_M\cos\Phi_0 = 10{,}0$ cm est positif, et $X_M > 0$: il faut $\cos\Phi_0 = 1$.

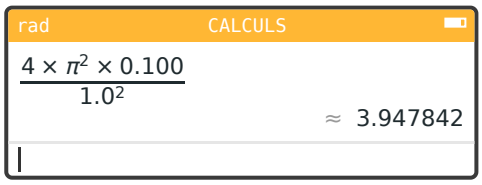
$X_M = 10{,}0$ cm (amplitude) et $\Phi_0 = 0$ rad (phase à l'origine).

PIÈGE
Dessiner $\vec{F}$ vers la droite. Sur le schéma, $x > 0$: le ressort est étiré et ramène S vers O. Les longueurs de $\vec{P}$ et $\vec{R}$ doivent être égales.

COMPRENDRE
T_0 est lue avec deux chiffres significatifs : k s'écrit donc avec deux chiffres, soit $3{,}9\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$. On garde $3{,}95$ pour les calculs suivants, afin de ne pas cumuler les arrondis.

MÉTHODE
Lire une période sur plusieurs oscillations, puis diviser : la lecture est plus précise. Le facteur 2π est sans dimension, il ne joue aucun rôle dans l'analyse dimensionnelle.

À LA CALCULATRICE



d) Sur l'enregistrement 3 (régime périodique, sans frottement), on compte 3 oscillations complètes entre $t = 0$ et $t = 3{,}0$ s : $T_0 = \dfrac{3{,}0}{3}$.

$T_0 = 1{,}0$ s

e) Une force s'écrit $F = k\,x$ et aussi $F = m\,a$: sa dimension est $M \cdot L \cdot T^{-2}$. Donc $[k] = \dfrac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L} = M \cdot T^{-2}$, puis

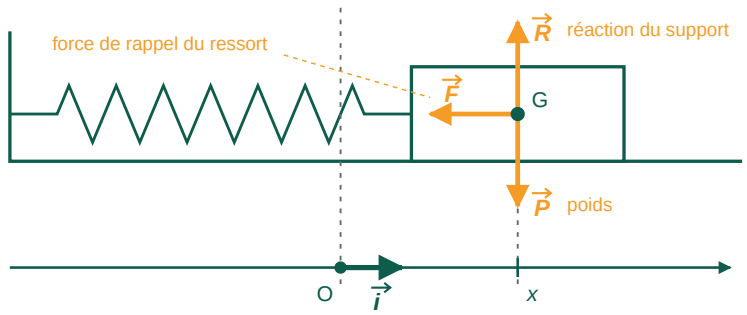
$$\left[\frac{m}{k}\right] = \frac{M}{M \cdot T^{-2}} = T^2$$

- $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ a la dimension T : homogène à une durée ;
- $2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ a la dimension T^{-1} : à rejeter ;
- $2\pi\dfrac{m}{k}$ a la dimension T^2 : à rejeter.

On retient $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, d'où $T_0^2 = 4\pi^2\dfrac{m}{k}$ et

$$k = \frac{4\pi^2\,m}{T_0^2} = \frac{4\pi^2 \times 0{,}100}{1{,}0^2} = 3{,}95\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ et $k \approx 3{,}9\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$



2 · Schéma n°2 complété : forces sur S à l'instant t (ici $x > 0$, ressort étiré)

3 Partie A, régime périodique. a) Exprimer E_P, E_C et E. b) Que dire de E ? La calculer à $t = 0$; en déduire la vitesse au passage par la position d'équilibre. c) Identifier les courbes du schéma n°3. d) Pourquoi E diminue-t-elle en régime pseudo-périodique ?

Données utiles $m = 0{,}100$ kg ; $X_M = 0{,}100$ m (Q2) ; $k = 3{,}95\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ (Q2)

a) Énergie potentielle élastique : $E_P = \frac{1}{2}\,k\,x^2$. Énergie cinétique : $E_C = \frac{1}{2}\,m\,v^2$.

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

b) Les frottements sont négligeables : l'énergie mécanique se conserve, E est constante au cours du mouvement.

À $t = 0$, la vitesse est nulle et $x = X_M$: $E = \frac{1}{2}\,k\,X_M^2 = \frac{1}{2} \times 3{,}95 \times 0{,}100^2 = 2{,}0 \times 10^{-2}$ J.

Au passage par la position d'équilibre, $x = 0$ donc $E_P = 0$ et $E = \frac{1}{2}\,m\,v^2$:

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}975 \times 10^{-2}}{0{,}100}} = 0{,}63\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$E = 2{,}0 \times 10^{-2}$ J (constante) et $v = 0{,}63\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ à la position d'équilibre.

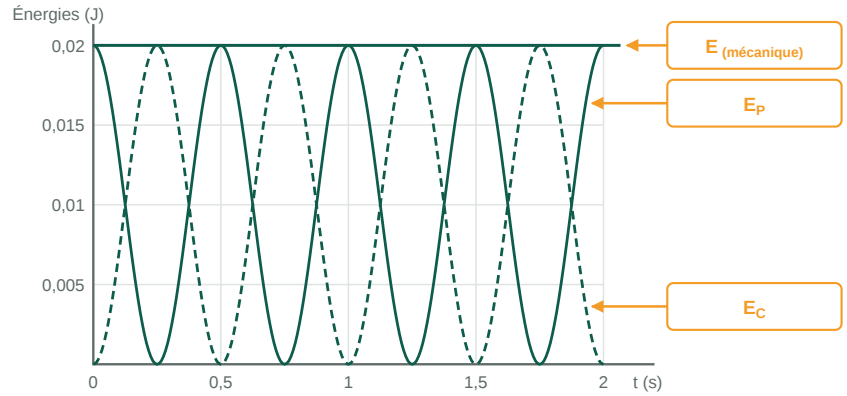
c) La droite horizontale, à $0{,}02$ J, est l'énergie mécanique E, constante.

À $t = 0$, $x = X_M$ et $v = 0$: E_P est maximale, égale à E, et E_C est nulle. La courbe qui part de $0{,}02$ J est donc E_P, celle qui part de 0 est E_C. À chaque instant, leur somme vaut $0{,}02$ J.

Cadre du haut : E ; cadre du milieu : E_P ; cadre du bas : E_C.

d) En régime pseudo-périodique, les frottements ne sont plus négligeables. Leur travail est résistant : à chaque oscillation, une partie de l'énergie mécanique est transférée au milieu extérieur sous forme thermique.

E diminue car les frottements dissipent de l'énergie.

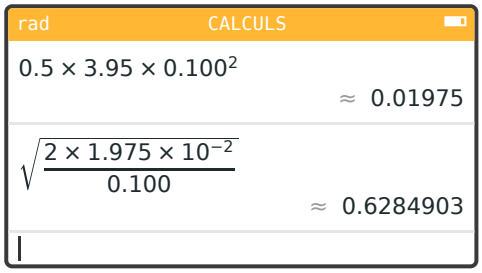


3 · Schéma n°3 complété (E_C est tracée ici en tirets pour la distinguer de E_P)

PIÈGE
Laisser X_M en centimètres dans le calcul de E : avec $10{,}0$ au lieu de $0{,}100$, l'énergie est multipliée par 10^4.

COMPRENDRE
Les énergies varient deux fois plus vite que x : leur période est $T_0/2 = 0{,}5$ s. La valeur calculée, $0{,}02$ J, est bien celle du palier du schéma n°3.

À LA CALCULATRICE



1 Partie B. Tracer l'allure de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps pour les deux régimes d'évolution du circuit (R, L, C), et les nommer.

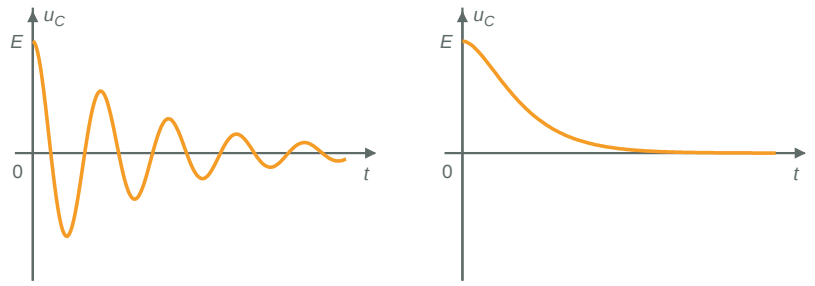
Au début de la décharge, le condensateur est chargé : $u_C(0) = E$. La résistance dissipe de l'énergie par effet Joule, donc u_C finit par s'annuler.

- R faible : u_C oscille autour de zéro avec une amplitude qui décroît ; c'est le régime pseudo-périodique.
- R grande : u_C revient vers zéro sans osciller ; c'est le régime apériodique.

R faible : régime pseudo-périodique ; R grande : régime apériodique (allures ci-dessous).

COMPRENDRE
Les circuits avec bobine (RL, RLC) et les oscillations électriques ne sont plus au programme actuel de spécialité ; le condensateur et le circuit RC le sont toujours.

MÉTHODE
L'analogie avec la partie A guide le tracé : R joue le rôle des frottements, q celui de x. Les deux courbes partent de E avec une tangente horizontale.



Régime pseudo-périodique (R faible) **Régime apériodique (R grande)**

1 · Allure de $u_C(t)$ pendant la décharge, pour les deux régimes

2 Partie B, avec $R = 0$. Reproduire la partie du circuit correspondant à la décharge, puis établir l'équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur.

On note q la charge de l'armature reliée à la borne positive pendant la charge, et on oriente i vers cette armature : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

Tension aux bornes du condensateur : $u_C = \dfrac{q}{C}$.

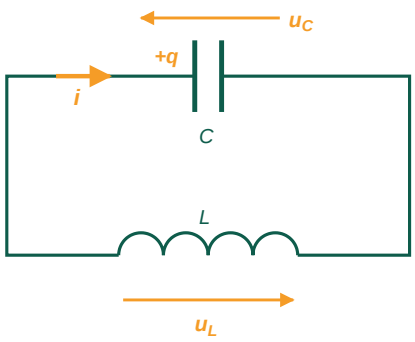
Tension aux bornes de la bobine, de résistance négligeable, en convention récepteur : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$.

Loi des mailles : $u_C + u_L = 0$, soit $\dfrac{q}{C} + L\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

PIÈGE
Écrire $i = -\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ sans changer l'orientation du schéma. Le signe dépend du sens choisi pour i : il doit être cohérent avec les flèches de tension, sinon l'équation obtenue n'a plus de solution oscillante.

COMPRENDRE
Pendant la décharge, q diminue : i est négatif, le courant réel circule dans le sens opposé à la flèche. L'équation a la même forme que celle de la partie A.



2 · Circuit de décharge (interrupteur en position 2, $R = 0$) et conventions choisies

3 Partie B. Vérifier que $q = Q_M \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \Phi_0\right)$ est solution de l'équation différentielle si $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

On dérive deux fois :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -Q_M \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \Phi_0\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = -Q_M \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \Phi_0\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} q$$

On reporte dans l'équation de la question 2 :

$$-\frac{4\pi^2}{T_0^2} q + \frac{1}{LC} q = \left(\frac{1}{LC} - \frac{4\pi^2}{T_0^2}\right) q = 0$$

L'égalité doit être vraie à chaque instant, alors que q varie : il faut $\frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{1}{LC}$, soit $T_0^2 = 4\pi^2\, LC$.

L'expression proposée est solution à condition que $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

MÉTHODE
Pour vérifier une solution : dériver, reporter dans l'équation, mettre la fonction en facteur. La parenthèse restante doit être nulle ; elle donne la condition sur T_0.

4 Partie B. Calculer la capacité du condensateur du capteur d'humidité.

Données utiles $T = 31{,}4\ \mu s$; $L = 200$ mH

La période mesurée est la période propre : $T = 2\pi\sqrt{LC}$, donc $T^2 = 4\pi^2\, LC$ et $C = \frac{T^2}{4\pi^2\, L}$.

Avec $T = 31{,}4 \times 10^{-6}$ s et $L = 0{,}200$ H :

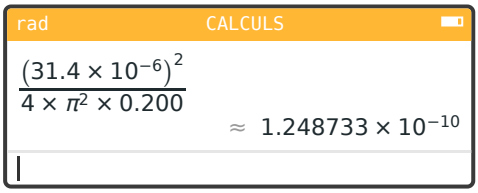
$$C = \frac{(31{,}4 \times 10^{-6})^2}{4\pi^2 \times 0{,}200} = 1{,}25 \times 10^{-10}\ \text{F}$$

$C = 1{,}25 \times 10^{-10}\ \text{F} = 125\ \text{pF}$

PIÈGE
Oublier de convertir les microsecondes en secondes et les millihenrys en henrys, ou oublier d'élever T au carré : le résultat change alors de plusieurs ordres de grandeur.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme T et L. Rappel : $1\ \text{pF} = 10^{-12}$ F.

À LA CALCULATRICE



5 Partie B. a) Avec $C = a\,h + b$, déterminer les constantes a et b à l'aide de la notice. b) Déterminer le pourcentage d'humidité relative de l'atmosphère dans les conditions de la question 4.

Données utiles sensibilité : $0{,}4$ pF par % d'HR ; $C = 122$ pF à 43 % d'HR ; $C = 125$ pF (Q4)

a) La sensibilité est la variation de C lorsque h augmente de 1 % d'HR : c'est le coefficient directeur a de la fonction affine. Donc $a = 0{,}4$ pF par % d'HR.

Pour $h = 43$ % d'HR, $C = 122$ pF : $b = C - a\,h = 122 - 0{,}4 \times 43 = 104{,}8$ pF.

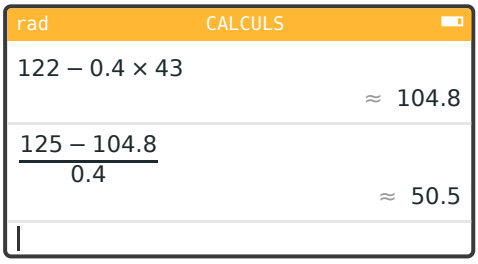
$a = 0{,}4$ pF par % d'HR et $b = 104{,}8$ pF ≈ 105 pF

b) De $C = a\,h + b$ on tire $h = \dfrac{C - b}{a}$:

$$h = \frac{125 - 104{,}8}{0{,}4} = 50{,}5$$

$h \approx 50$ % d'HR

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Arrondir b à 1×10^2 pF avant de calculer h : on obtiendrait plus de 60 %. On garde $104{,}8$ pF dans le calcul et on n'arrondit que le résultat final.

COMPRENDRE
La sensibilité n'a qu'un chiffre significatif et h vient d'une différence de capacités voisines : seul l'ordre de grandeur « environ 50 % » a un sens. Avec C non arrondie, on trouve d'ailleurs $50{,}2$.