Chute d'une balle de ping-pong

Bac S 2003 Amérique du Nord (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1 Faire correspondre chaque schéma d'élève à une des propositions d'Amélie. Justifier.

Le poids $\vec{P}$ et la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ gardent la même valeur pendant toute la chute. Seule la force de frottement $\vec{F}$ change : nulle quand la balle est immobile, elle grandit avec la vitesse.

- Schéma de Benoît : pas de force $\vec{F}$, donc $v = 0$. C'est l'instant initial.
- Schéma d'Adrien : $\vec{F}$ est présente mais courte. C'est une date t quelconque.
- Schéma d'Amélie : $\vec{F}$ est la plus longue, la vitesse est donc plus grande. C'est un temps de chute plus grand.

Benoît : instant du lâcher ; Adrien : date t quelconque ; Amélie : temps de chute plus grand.

MÉTHODE
Pour classer des schémas de forces dans le temps, chercher la force qui varie. Ici seule $\vec{F}$ dépend de la vitesse : sa longueur indique l'ordre chronologique.

2 Calculer le rapport des forces entre le poids et la poussée d'Archimède. Conclure.

Données utiles $m = 2{,}3$ g ; $r = 1{,}9$ cm ; $\rho = 1{,}3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $V_s = \frac{4}{3}\pi r^3$

Poids : $P = m\,g$. Poussée d'Archimède (poids du volume d'air déplacé) : $\Pi = \rho\,V_s\,g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho\,g$.

$$\frac{P}{\Pi} = \frac{3\,m}{4\,\pi\,\rho\,r^3} = \frac{3 \times 2{,}3 \times 10^{-3}}{4 \times \pi \times 1{,}3 \times (1{,}9 \times 10^{-2})^3} = 62$$

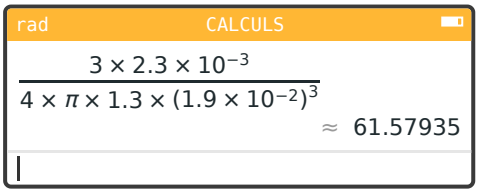
La poussée d'Archimède est 62 fois plus petite que le poids : on peut la négliger devant lui, comme l'annonce Benoît.

$\frac{P}{\Pi} = 62$: la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids.

PIÈGE
Les unités : m en kilogramme ($2{,}3 \times 10^{-3}$ kg) et r en mètre ($1{,}9 \times 10^{-2}$ m), puisque ρ est en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Le rayon est au cube.

COMPRENDRE
Les données ont deux chiffres significatifs : le rapport s'écrit 62. Dans le quotient, g se simplifie ; le résultat ne dépend pas de sa valeur.

À LA CALCULATRICE



3 Retrouver l'équation (1) trouvée par Adrien. Indiquer l'axe de projection utilisé.

Système {balle}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Forces : le poids $\vec{P}$ (vertical, vers le bas) et la force de frottement $\vec{F}$ (verticale, vers le haut) ; la poussée d'Archimède est négligée (question 2).

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{a}$.

On projette sur un axe vertical orienté vers le bas, dans le sens du mouvement : $P_z = +m\,g$, $F_z = -F$ et $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

$m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\,g - F$, sur un axe vertical orienté vers le bas.

PIÈGE
Oublier de préciser le sens de l'axe. Avec un axe orienté vers le haut, les signes de l'équation (1) seraient inversés.

4 Identifier sur le document 1 les deux courbes représentées. Justifier.

La balle est lâchée sans vitesse initiale : $v(0) = 0$. Seule la courbe 2 passe par l'origine, puis elle croît vers une valeur limite.

À $t = 0$, $F = 0$ donc l'équation (1) donne $a(0) = g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$: c'est l'ordonnée à l'origine de la courbe 1, qui décroît ensuite vers zéro.

Courbe 1 : accélération $a(t)$; courbe 2 : vitesse $v(t)$.

5 Déterminer, à partir du document 1, la vitesse limite v_{lim} de la balle. En déduire la valeur expérimentale de k. Retrouver l'équation (2).

Données utiles $m = 2{,}3\ \mathrm{g}$; $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $F = k\,v^2$

Sur la courbe 2, la vitesse ne varie plus à partir de $t \approx 2$ s : $v_{lim} = 8{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Quand la vitesse limite est atteinte, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. L'équation (1) devient $m\,g - k\,v_{lim}^2 = 0$, d'où

$$k = \frac{m\,g}{v_{lim}^2} = \frac{2{,}3\times10^{-3}\times 9{,}8}{8{,}0^2} = 3{,}5\times10^{-4}\ \mathrm{kg\cdot m^{-1}}$$

En divisant l'équation (1) par m, avec $F = k\,v^2$: $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \dfrac{k}{m}\,v^2$.

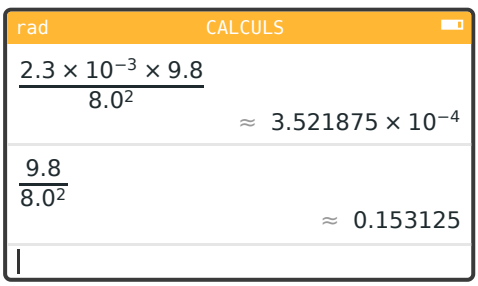
Or $\dfrac{k}{m} = \dfrac{g}{v_{lim}^2} = \dfrac{9{,}8}{8{,}0^2} = 0{,}15\ \mathrm{m^{-1}}$.

$v_{lim} = 8{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $k = 3{,}5\times10^{-4}\ \mathrm{kg\cdot m^{-1}}$; $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9{,}8 - 0{,}15\,v^2$

PIÈGE
Unité de k : $F = k\,v^2$ donne des $\mathrm{N\cdot s^2\cdot m^{-2}}$, soit des $\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$. Un résultat sans unité est incomplet.

COMPRENDRE
À la vitesse limite, le frottement compense exactement le poids : la somme des forces est nulle et le mouvement devient rectiligne uniforme.

À LA CALCULATRICE



6 Calculer la valeur théorique $k_t = 0{,}22\,\pi\,\rho\,r^2$. Comparer k et k_t et conclure.

Données utiles $\rho = 1{,}3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $r = 1{,}9$ cm ; $k = 3{,}5\times10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$ (Q5)

$$k_t = 0{,}22\times\pi\times1{,}3\times(1{,}9\times10^{-2})^2 = 3{,}2\times10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$$

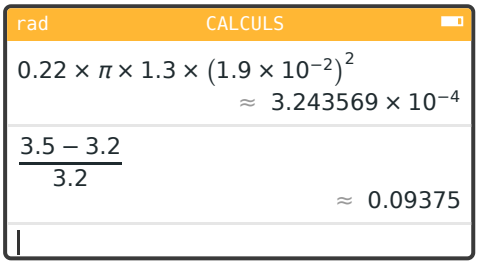
Écart relatif : $\dfrac{k-k_t}{k_t} = \dfrac{3{,}5-3{,}2}{3{,}2} \approx 9\ \%$.

Les deux valeurs sont du même ordre de grandeur et diffèrent de moins de 10 %, alors que v_{lim} est lue sur un graphique. La valeur expérimentale de k est compatible avec l'expression théorique.

$k_t = 3{,}2\times10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$, proche de $k = 3{,}5\times10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$ (écart d'environ 9 %).

MÉTHODE
« Comparer » deux valeurs demande un chiffre : calculer l'écart relatif, puis le juger au regard de la précision des mesures.

À LA CALCULATRICE



7.a Évaluer le temps caractéristique de l'évolution du système. Le choix du pas d'itération vous semble-t-il satisfaisant ? Justifier.

Données utiles $\Delta t = 0{,}05$ s ; $v_{lim} = 8{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (Q5)

On trace la tangente à l'origine de la courbe $v(t)$ et l'asymptote horizontale $v = v_{lim}$. Elles se coupent à la date $t = \tau$: on lit $\tau \approx 0{,}8$ s.

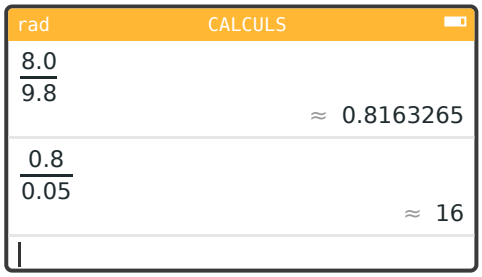
Vérification : la pente de la tangente à l'origine vaut $a(0) = g$, donc $\tau = \dfrac{v_{lim}}{g} = \dfrac{8{,}0}{9{,}8} = 0{,}82$ s.

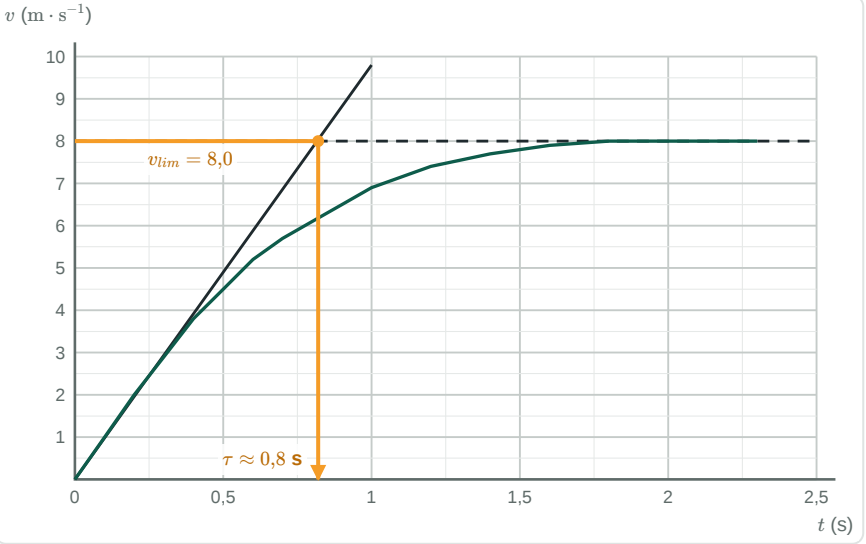
Le pas $\Delta t = 0{,}05$ s est environ 16 fois plus petit que τ : la vitesse varie peu pendant un pas, le choix paraît satisfaisant.

$\tau \approx 0{,}8$ s ; $\Delta t = 0{,}05$ s $\approx \dfrac{\tau}{16}$: pas petit devant τ, choix satisfaisant.

MÉTHODE
Le pas d'une méthode d'Euler se juge par rapport au temps caractéristique : il doit être petit devant τ, en général au moins dix fois plus petit.

À LA CALCULATRICE





7.a · Document 1, courbe 2 : tangente à l'origine et asymptote $v = v_{lim}$

7.b Compléter les trois cases vides du tableau donné en annexe. Justifier.

Données utiles équation (2) ; $\Delta t = 0{,}05$ s ; $v_1 = 0{,}49\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $v_3 = 1{,}4610227\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Accélération à une date t_n : $a_n = 9{,}8 - 0{,}15\,v_n^2$. Vitesse à la date suivante : $v_{n+1} = v_n + a_n\,\Delta t$.

Case a_1 ($t = 0{,}05$ s) : $a_1 = 9{,}8 - 0{,}15 \times 0{,}49^2 = 9{,}76\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Case v_2 ($t = 0{,}1$ s) : $v_2 = v_1 + a_1\,\Delta t = 0{,}49 + 9{,}76 \times 0{,}05 = 0{,}98\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

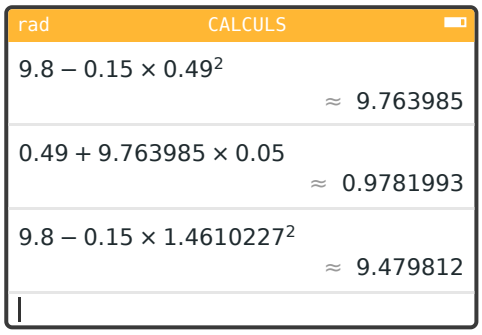
Case a_3 ($t = 0{,}15$ s) : $a_3 = 9{,}8 - 0{,}15 \times 1{,}4610227^2 = 9{,}48\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

$a_1 = 9{,}76\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $v_2 = 0{,}98\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $a_3 = 9{,}48\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

PIÈGE
Calculer v_2 avec l'accélération a_2 : c'est l'accélération de la ligne précédente, a_1, qui sert à passer de v_1 à v_2.

COMPRENDRE
Contrôle : avec $v_2 = 0{,}978$, on retrouve $a_2 = 9{,}8 - 0{,}15\,v_2^2 = 9{,}656$, la valeur imprimée dans le tableau.

À LA CALCULATRICE



Temps	Vitesse	Accélération
t (s)	v (m/s)	dv/dt (m/s²)
0	0	9,8
0,05	0,49	9,763985
0,1	0,97819925	9,65646893
0,15	1,4610227	9,47981190
0,2	1,93501329	9,23835853
0,25	2,39693122	8,93820811

7.b · Annexe complétée : les trois cases effacées sont en orange

7.c Justifier très brièvement l'exclamation d'Amélie à propos de la précision des résultats des calculs d'Adrien.

Les données ($g = 9{,}8$; coefficient $0{,}15$; $v_{lim} = 8{,}0$) n'ont que deux chiffres significatifs, et la méthode d'Euler est elle-même une approximation. Les huit ou neuf chiffres affichés par le tableur n'ont donc aucune signification physique.

Un résultat ne peut pas être plus précis que les données : deux ou trois chiffres significatifs suffisent.

8.a Comparer les valeurs expérimentales (courbes 1 et 2) et les valeurs calculées avec la méthode d'Euler (courbes 3 et 4).

Vitesse : les courbes 2 (expérience) et 3 (Euler) sont presque confondues, avec la même vitesse limite ; l'écart reste faible, visible surtout autour de $t = 1$ s.

Accélération : les courbes 1 (expérience) et 4 (Euler) ont la même allure et la même valeur initiale, mais elles s'écartent davantage. Pour $t > 1{,}5$ s, l'accélération calculée n'est pas encore nulle alors que l'accélération mesurée l'est pratiquement.

Bon accord pour la vitesse ; accord moins bon pour l'accélération, surtout en fin de chute.

8.b Avant de conclure sur la validité du modèle utilisé pour la force de frottement, que faut-il modifier dans le calcul numérique ?

L'écart observé peut venir de la méthode de calcul et non du modèle : la méthode d'Euler suppose l'accélération constante pendant chaque pas. Il faut refaire le calcul avec un pas Δt plus petit (donc davantage de lignes) et vérifier si les courbes calculées se rapprochent des courbes expérimentales.

Diminuer le pas d'itération Δt.

COMPRENDRE
Si l'écart persiste avec un pas beaucoup plus petit, c'est le modèle $F = k\,v^2$ lui-même qui est en cause, et non le calcul numérique.

8.c Quel autre modèle pourrait-on proposer pour la force de frottement ? Expliquer brièvement ce qui serait modifié dans l'équation (2).

On peut proposer une force de frottement proportionnelle à la vitesse : $F = k'\,v$.

L'équation (1) donne alors $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \dfrac{k'}{m}\,v$: le terme en v^2 est remplacé par un terme en v, avec un coefficient différent.

Ce coefficient se déduit encore de la vitesse limite : $\dfrac{k'}{m} = \dfrac{g}{v_{lim}} = \dfrac{9{,}8}{8{,}0} = 1{,}2\ \mathrm{s}^{-1}$.

$F = k'\,v$ et $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9{,}8 - 1{,}2\,v$

À LA CALCULATRICE

