2003 – Amérique du nord

II – Chute d'une balle de ping-pong (5,5 points)

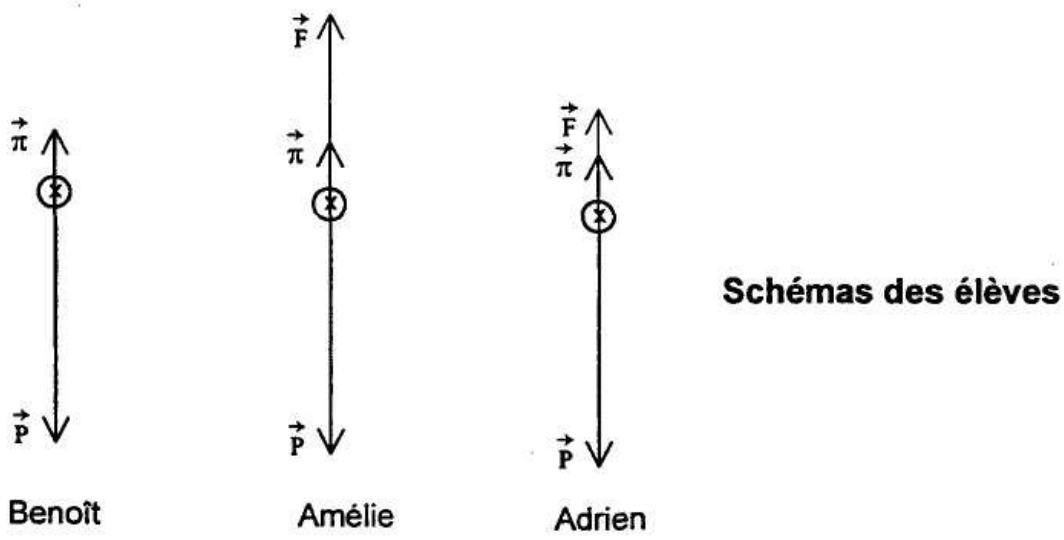
Au cours d'une séance de travaux pratiques, un professeur propose à un groupe formé d'Adrien, Benoît et Amélie d'étudier la chute d'une balle de ping-pong dans l'air. Les élèves disposent de l'enregistrement du mouvement de chute **(voir document 1 page suivante).**

Données *:*

masse de la balle m = 2,3 g
rayon de la balle r = 1,9 cm ;
accélération de la pesanteur g = 9,8 $m.s^{-2}$
masse volumique de l'air ρ = 1,3 $kg.m^{-3}$
volume de la sphère : $V_s = \frac{4}{3}\pi r^3$

L'objectif de la séance est la modélisation de la chute par une méthode numérique en faisant l'hypothèse que les frottements dépendent de la vitesse.

La première étape consiste à faire le bilan des forces s'exerçant sur la balle. Chacun se met alors au travail. Au bout de quelques minutes, ils confrontent leurs résultats :



Schémas des élèves

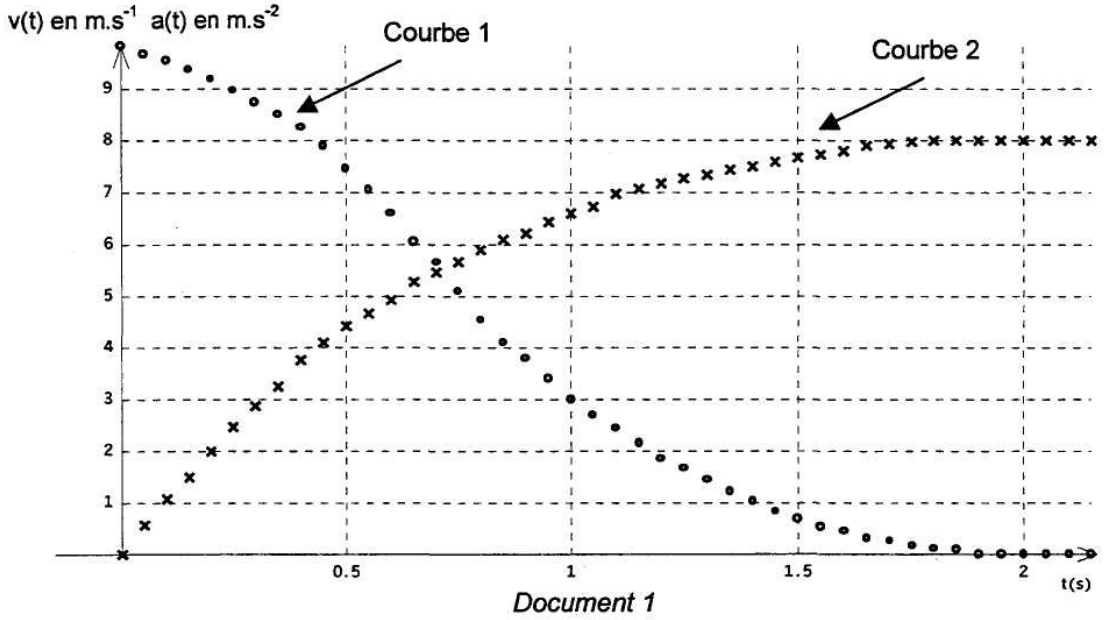
Leur surprise est grande ; les trois schémas sont différents ! Ils appellent leur professeur.
Le professeur: Chacun d'entre vous a à la fois raison et tort, car chaque schéma correspond à une situation particulière. Réfléchissez !
Adrien: Moi je pense qu'il y a trois forces : le poids de la balle $\vec{P}$, la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ et une force de frottement $\vec{F}$.
Amélie : Je crois que j'ai compris. Un des schémas correspond à l'instant initial, juste quand la balle est lâchée ; un autre représente les forces à une date t quelconque et un autre la situation au bout d'un temps de chute plus grand.
Benoît *:* Ne peut-on pas négliger la poussée d'Archimède devant le poids ?
Amélie *:* Bonne idée, fais le calcul !
Benoît trouve effectivement que la poussée est 62 fois plus petite que le poids.

Adrien : Du coup, cela devient plus simple ! Maintenant on va appliquer la deuxième loi de Newton au centre d'inertie au système.

Il obtient l'équation suivante (notée **équation 1)** : $m\frac{dv}{dt} = m.g - F$

Suite à cette première partie du dialogue, vous pouvez répondre aux questions 1, 2 et 3 (page suivante).

Amélie : C'est bien beau, mais on ne connaît pas F !
Le professeur: Plusieurs modèles sont envisageables. Je vous propose de faire l'hypothèse que la valeur de la force de frottement $\vec{F}$ est proportionnelle au carré de la vitesse : $F = k.v^2$. Vous pouvez déterminer la valeur de k à partir des valeurs expérimentales du document 1 que voici :



Document 1

Amélie : L'une des courbes représente l'accélération en fonction du temps a(t) et l'autre la vitesse v(t).
Benoît : Bon, on sait qu'à t = 0, on doit avoir $v_0 = 0$ puisque la balle a été lâchée sans vitesse initiale.
Adrien : Tu as raison. On voit que la vitesse tend vers une limite v_{lim}. Je crois que j'ai trouvé comment calculer la valeur de k d'après l'enregistrement.
Adrien se livre alors à quelques calculs et obtient l'équation suivante :

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - 0{,}15.v^2 \quad \textbf{(équation 2)}$$

A la suite de cette deuxième partie, vous pouvez répondre aux questions 4, 5 et 6 (page suivante).

Ces résultats étant validés, le professeur propose de résoudre l'équation (2) par la méthode numérique d'Euler à l'aide d'un tableur.
Benoît : Ça me revient ! il faut connaître les conditions initiales. On a dit qu'à t = 0 on avait $v_0 = 0$ donc on connaît $(dv/dt)_{t=0}$.

Amélie : Et après, il y a le pas d'itération Δt, il doit être petit.
Benoît : On pourrait essayer $\Delta t = 0{,}05$ s.
Amélie : Voyons si je peux calculer les premières valeurs. On part de $a_o = 9{,}8$ m.s^{-2} et $v_o = 0$. On admet que dv/dt est proche de $\Delta v/\Delta t$, donc $\Delta v = (9{,}8 - 0{,}15.v^2).\Delta t$ soit $\Delta v = 0{,}49$ m.s^{-1} au départ.
Benoît : C'est bien cela ! On dit que pendant le petit intervalle de temps Δt, la valeur de la dérivée de la vitesse est constante. On peut en déduire Δv et la nouvelle valeur de v.
Amélie : Si j'ai bien compris, entre $t = 0$ s et $t_1 = 0{,}05$ s, la vitesse est passée de $v_0 = 0$ à $v_1 = 0{,}49$ m.s^{-1}.
Benoît *:* Mais oui ! Et maintenant on calcule la nouvelle valeur de l'accélération, je trouve : $(dv/dt)_{t1} = 9{,}76$ m.s^{-2}. Ainsi de suite, on procède par itérations successives.
Amélie et Benoît continuent leurs calculs à la main pendant qu'Adrien effectue les calculs avec le tableur d'un ordinateur.
Adrien : Ça y est ! j'ai fini ! Tenez, je vous imprime le début de ma page de calculs …….. mais j'ai effacé trois cases, je vous avertis ! (Voir les premières lignes du tableau en annexe **à rendre avec la copie).**
Amélie : On a les mêmes résultats que toi, et sans tableur ! Mais tous ces chiffres après la virgule, ça me fait bien rire !

A la suite de cette dernière partie, vous pouvez répondre aux questions 7 et 8.

Questions

1) Faire correspondre chaque schéma d'élève à une des propositions d'Amélie. Justifier.
2) Calculer le rapport des forces entre le poids et la poussée d'Archimède. Conclure.
3) Retrouver alors **l'équation (1)** trouvée par Adrien. Indiquer l'axe de projection qui a été utilisé.
4) Identifier sur le document 1 (page précédente) les deux courbes représentées. Justifier.
5) Déterminer, à partir du document 1, la vitesse limite v_{lim} de la balle. En déduire la valeur expérimentale de k. Retrouver **l'équation (2).**
6) Dans le cas d'une sphère de rayon r se déplaçant dans un fluide de masse volumique ρ, la valeur théorique de k (notée k_t) a pour expression :

$$k_t = 0{,}22.\pi.\rho.\ r^2$$

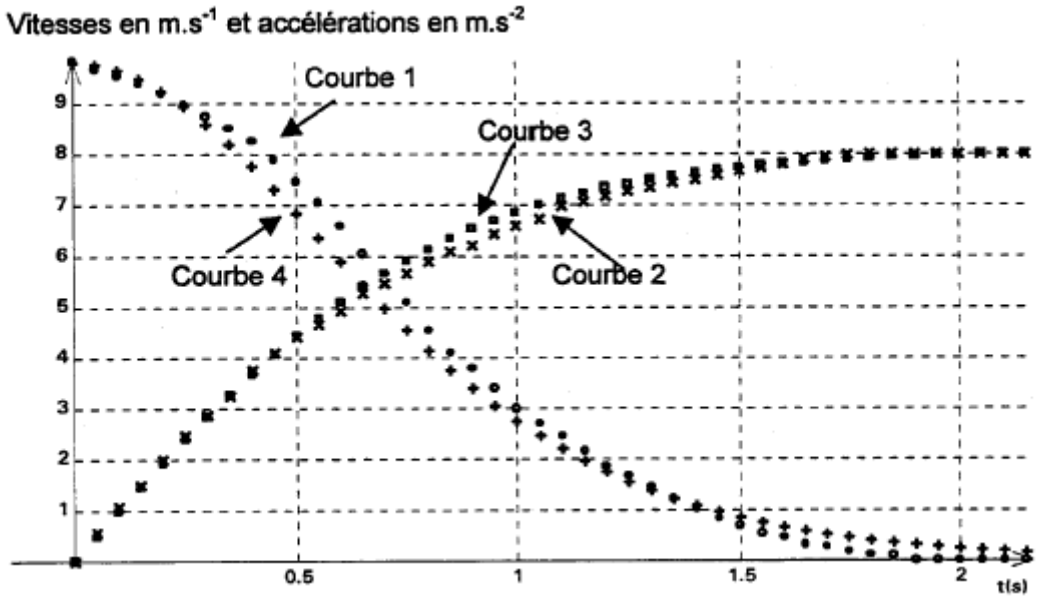
Calculer la valeur théorique k_t.
Comparer k et k_t et conclure.

7) a) Évaluer le temps caractéristique de l'évolution du système. Le choix du pas d'itération vous semble-t-il satisfaisant ? Justifier.

b) Compléter les trois cases vides du tableau donné en **annexe (à rendre avec la copie).** Justifier.

c) Justifier très brièvement l'exclamation d'Amélie à propos de la précision des résultats des calculs d'Adrien.

8) a) Comparer les valeurs expérimentales (courbes 1 et 2) et les valeurs calculées avec la méthode d'Euler (courbes 3 et 4) qui sont rassemblées dans le graphe ci-dessous:



b) Avant de conclure sur la validité du modèle utilisé pour la force de frottement, que faut - il modifier dans le calcul numérique ?

c) Quel autre modèle pourrait - on proposer pour la force de frottement ?
Expliquer brièvement ce qui serait modifié dans l'équation (2) qui sert de base à la méthode d'Euler.

EXERCICE II : ANNEXE à rendre avec la copie

Tableau des calculs utilisant la méthode d'Euler :

Temps	Vitesse	Accélération
t(s)	v (m/s)	dv/dt (m/s^2)
0	0	9,8
0,05	0,49	
0,1		9,65646893
0,15	1,4610227	
0,2	1,93501329	9,23835853
0,25	2,39693122	8,93820811