Circuits RL et RLC

Bac S 2003 Nouvelle-Calédonie (ancien programme) · Exercice 3 **6,5 points** **Durée conseillée 1 h 18**

1.1 Préciser à quels points du circuit relier les bornes COM et V de l'adaptateur pour obtenir la courbe de la figure 2.

La courbe de la figure 2 représente u_R, qui est positive. Sur le schéma, la flèche de u_R pointe vers A : $u_R = u_{AB} = V_A - V_B$.

L'adaptateur mesure $V_{\text{V}} - V_{\text{COM}}$.

Borne V au point A, borne COM au point B.

PIÈGE
Inverser les deux bornes : on enregistrerait $u_{BA} = -u_R$, une courbe négative, symétrique de celle de la figure 2 par rapport à l'axe des temps.

1.2 Parmi les courbes a, b, c et d, choisir celle qui représente l'intensité du courant après la fermeture de l'interrupteur, en justifiant à partir de la figure 2.

Loi d'Ohm pour le conducteur ohmique : $u_R = R\,i$, donc $i = \dfrac{u_R}{R}$.

Comme R est constante, i est proportionnelle à u_R : les deux grandeurs ont la même allure. Or u_R part de zéro, croît de moins en moins vite, puis se stabilise.

C'est la courbe c.

MÉTHODE
Un système d'acquisition ne mesure que des tensions. Pour suivre une intensité, on enregistre la tension aux bornes d'un conducteur ohmique, puis on divise par R.

1.3 Quelle est l'influence de la bobine sur l'établissement du courant à la fermeture du circuit ?

Une bobine s'oppose aux variations de l'intensité du courant qui la traverse. À la fermeture, l'intensité ne passe donc pas brutalement de zéro à sa valeur finale : elle augmente progressivement.

La bobine retarde l'établissement du courant (régime transitoire d'environ 5 ms ici).

COMPRENDRE
La bobine et les circuits RL ne figurent plus au programme actuel de spécialité. Le raisonnement reste proche de celui du circuit RC : régime transitoire, constante de temps, équation différentielle du premier ordre.

2.1 En négligeant la résistance r de la bobine devant R, établir l'équation différentielle vérifiée par $u_R(t)$, interrupteur fermé.

Loi d'additivité des tensions, interrupteur fermé : $E = u_R + u_L$.

Bobine de résistance négligeable, en convention récepteur : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

Or $i = \dfrac{u_R}{R}$ avec R constante, donc $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}$ et $u_L = \dfrac{L}{R}\dfrac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}$.

$$E = u_R(t) + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_R(t)}{\mathrm{d}t}$$

COMPRENDRE
Sans approximation, $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + r\,i$. Ici $r = 10\ \Omega$ représente 1 % de $R = 1{,}0\ \text{k}\Omega$: le terme $r\,i$ est négligeable devant $R\,i$.

2.2 Montrer par une analyse dimensionnelle que $\tau = \dfrac{L}{R}$ a la dimension d'un temps.

Loi d'Ohm $u = Ri$: $[U] = [R] \cdot [I]$, soit $[R] = [U] \cdot [I]^{-1}$.

Tension aux bornes d'une bobine $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$: $[U] = [L] \cdot [I] \cdot [T]^{-1}$, soit $[L] = [U] \cdot [T] \cdot [I]^{-1}$.

$$\left[\frac{L}{R}\right] = \frac{[U] \cdot [T] \cdot [I]^{-1}}{[U] \cdot [I]^{-1}} = [T]$$

$\dfrac{L}{R}$ a la dimension d'un temps : τ s'exprime en secondes.

MÉTHODE
Pour une analyse dimensionnelle, partir de deux relations du cours contenant chacune une des grandeurs, les écrire en dimensions, puis former le rapport demandé : les dimensions communes se simplifient.

2.3 Sachant que $u_R(\tau) = 0{,}63\,(u_R)_{max}$, déterminer graphiquement la constante de temps τ du circuit.

Données utiles figure 2

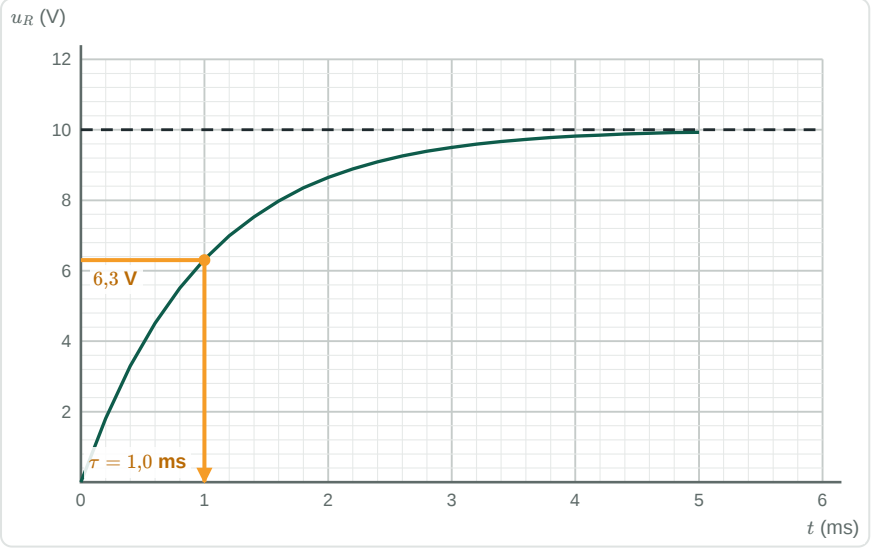
Sur la figure 2, la tension se stabilise à $(u_R)_{max} = 10$ V.

$u_R(\tau) = 0{,}63 \times 10 = 6{,}3$ V.

Le point de la courbe d'ordonnée 6,3 V a pour abscisse 1,0 ms.

$\tau = 1{,}0\ \text{ms} = 1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{s}$

COMPRENDRE
Épreuve sans calculatrice : les valeurs sont choisies pour des calculs simples. Deux chiffres significatifs, comme les données ($R = 1{,}0\ \text{k}\Omega$) et la précision de la lecture graphique.



2.3 · Figure 2 du sujet (allure), avec la lecture de τ

2.4 En déduire la valeur de L et la comparer avec l'indication du fabricant.

Données utiles $\tau = 1{,}0 \times 10^{-3}$ s (2.3) ; $R = 1{,}0\ \text{k}\Omega$; fabricant : $L = 1{,}0$ H

$\tau = \dfrac{L}{R}$, donc $L = \tau\, R$.

$$L = 1{,}0 \times 10^{-3} \times 1{,}0 \times 10^{3} = 1{,}0\ \text{H}$$

$L = 1{,}0$ H : valeur en accord avec celle du fabricant (1,0 H).

PIÈGE
Laisser τ en millisecondes ou R en kilohms. Avec les deux à la fois, les puissances de dix se compensent par hasard : mieux vaut convertir en secondes et en ohms.

3.1 À partir de l'équation différentielle du 2.1, exprimer $\frac{du_R}{dt}$ en fonction de u_R et des données.

Données utiles $E = 10$ V ; $R = 1{,}0 \times 10^3\ \Omega$; $L = 1{,}0$ H

$E = u_R + \frac{L}{R}\frac{du_R}{dt}$, donc $\frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} = E - u_R$.

$\frac{du_R}{dt} = \frac{R}{L}(E - u_R) = 1{,}0 \times 10^3 \times (10 - u_R)$, en $\text{V} \cdot \text{s}^{-1}$ avec u_R en volts.

3.2 Avec un pas $\Delta t = 1{,}0 \times 10^{-4}$ s, calculer littéralement puis numériquement $\frac{du_R}{dt}$ aux dates 0 et Δt, ainsi que u_R aux dates Δt et $2\Delta t$. Compléter le tableau de l'annexe.

Données utiles $(u_R)_0 = 0$ V ; $\frac{R}{L} = 1{,}0 \times 10^3\ \text{s}^{-1}$ et $E = 10$ V (3.1)

Formules littérales : $\left(\frac{du_R}{dt}\right)_n = \frac{R}{L}\left(E - (u_R)_n\right)$ et $(u_R)_{n+1} = (u_R)_n + \left(\frac{du_R}{dt}\right)_n \Delta t$.

$$\left(\frac{du_R}{dt}\right)_0 = 1{,}0 \times 10^3 \times (10 - 0) = 1{,}0 \times 10^4\ \text{V} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$(u_R)_{\Delta t} = 0 + 1{,}0 \times 10^4 \times 1{,}0 \times 10^{-4} = 1{,}0\ \text{V}$$

$$\left(\frac{du_R}{dt}\right)_{\Delta t} = 1{,}0 \times 10^3 \times (10 - 1{,}0) = 9{,}0 \times 10^3\ \text{V} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$(u_R)_{2\Delta t} = 1{,}0 + 9{,}0 \times 10^3 \times 1{,}0 \times 10^{-4} = 1{,}9\ \text{V}$$

$(u_R)_{\Delta t} = 1{,}0$ V ; $(u_R)_{2\Delta t} = 1{,}9$ V ; dérivées (en $\text{V} \cdot \text{s}^{-1}$) : $1{,}0 \times 10^4$ puis $9{,}0 \times 10^3$

PIÈGE
Calculer $(u_R)_{2\Delta t}$ avec la dérivée initiale donnerait 2,0 V. La dérivée doit être recalculée à chaque pas : elle diminue quand u_R augmente.

MÉTHODE
Chaque ligne du tableau se remplit en deux temps : la nouvelle valeur de u_R avec la dérivée de la ligne précédente, puis la nouvelle dérivée avec cette valeur de u_R.

date	Valeur de u_R en V	Valeur de du_R/dt en $V \cdot s^{-1}$
$t_0 = 0$ s	$(u_R)_0 = 0{,}000$	$(du_R/dt)_0 =$ **$1{,}0 \times 10^4$**
$t = \Delta t$	$(u_R)_{\Delta t} =$ **1,0**	$(du_R/dt)_{\Delta t} =$ **$9{,}0 \times 10^3$**
$t = 2\Delta t$	$(u_R)_{2\Delta t} =$ **1,9**	

3.2 · Annexe A3 complétée (valeurs calculées en orange)

3.3 Quelle serait qualitativement l'influence d'une augmentation du pas Δt sur l'écart entre les points obtenus par la méthode d'Euler et la courbe expérimentale ?

La méthode d'Euler suppose la dérivée constante pendant toute la durée Δt, alors qu'elle varie en réalité. Plus le pas est grand, plus cette approximation est grossière.

Augmenter Δt augmente l'écart entre les points calculés et la courbe expérimentale.

COMPRENDRE
Un pas plus petit améliore la précision mais multiplie les calculs. Un pas adapté reste nettement inférieur à τ : ici $\Delta t = \frac{\tau}{10}$, et les deux séries de points se superposent presque.

4.1 Comment expliquer la diminution de l'amplitude des oscillations au cours du temps ?

Le circuit contient une résistance : celle de la bobine, $r = 10\ \Omega$. À chaque passage du courant, une partie de l'énergie échangée entre le condensateur et la bobine est dissipée par effet Joule, sous forme de transfert thermique.

L'énergie électrique du circuit diminue, donc l'amplitude de u_C décroît : le régime est pseudo-périodique.

COMPRENDRE
Les oscillations électriques d'un circuit RLC ne sont plus au programme actuel de spécialité. L'idée générale demeure : un oscillateur qui perd de l'énergie voit son amplitude diminuer.

4.2 Déterminer la valeur de la pseudo-période du signal.

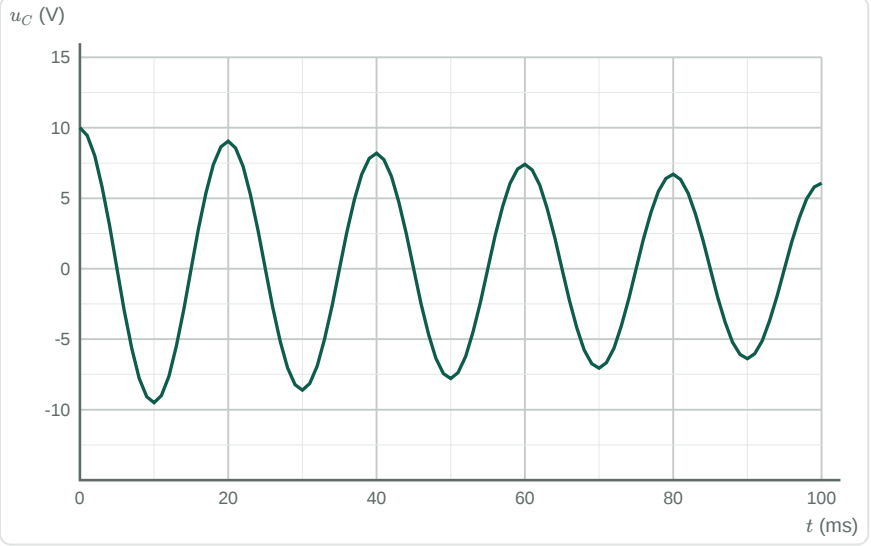
Données utiles figure 5

Sur la figure 5, on compte 5 pseudo-périodes entre $t = 0$ et $t = 100$ ms (un maximum à chaque graduation de 20 ms) : $5\,T = 100$ ms.

$$T = \frac{100}{5} = 20 \text{ ms}$$

$T = 20 \text{ ms} = 2{,}0 \times 10^{-2} \text{ s}$

MÉTHODE
Mesurer la durée de plusieurs pseudo-périodes puis diviser par leur nombre : l'incertitude de lecture est répartie sur toutes les oscillations.



4.2 · Figure 5 du sujet (allure) : cinq pseudo-périodes en 100 ms

4.3 En admettant que la pseudo-période et la période propre ont la même expression, en déduire la capacité C du condensateur et la comparer avec l'indication du fabricant.

Données utiles $T = 2{,}0 \times 10^{-2}$ s (4.2) ; $L = 1{,}0$ H ; $\pi^2 \approx 10$; fabricant : $C = 10\ \mu$F

Période propre : $T_0 = 2\pi\sqrt{L\,C}$, et $T = T_0$.

En élevant au carré : $T^2 = 4\pi^2\,L\,C$, donc $C = \dfrac{T^2}{4\pi^2\,L}$.

$$C = \frac{(2{,}0 \times 10^{-2})^2}{4 \times 10 \times 1{,}0} = \frac{4{,}0 \times 10^{-4}}{40} = 1{,}0 \times 10^{-5} \text{ F}$$

$C = 1{,}0 \times 10^{-5}$ F $= 10\ \mu$F : valeur en accord avec celle du fabricant.

PIÈGE
Oublier d'élever 2π au carré, ou garder T en millisecondes : le résultat serait faux d'un facteur 10^6.

COMPRENDRE
Assimiler pseudo-période et période propre suppose un amortissement faible, ce qui est le cas ici : la résistance du circuit se réduit aux $10\ \Omega$ de la bobine.