Chute libre et parachutisme

Bac S 2004 Inde (Pondichéry) (ancien programme) · Exercice 4 **6 points** **Durée conseillée 1 h 18**

1.1 Partie A. Exprimer la valeur F de la force de gravitation exercée par la Terre sur le système, en fonction de M_T, R_T, G, m et h.

Le système est à la distance $R_T + h$ du centre de la Terre.

$$F = \frac{G\,m\,M_T}{(R_T+h)^2}$$

PIÈGE
Écrire h^2 au dénominateur : la distance à prendre est celle qui sépare le système du centre de la Terre, soit $R_T + h$.

1.2 Partie A. Le poids étant assimilé à la force de gravitation, en déduire l'expression de l'intensité g de la pesanteur à l'altitude h.

Le poids a pour valeur $P = m\,g$. Avec $P = F$: $m\,g = \dfrac{G\,m\,M_T}{(R_T+h)^2}$. On simplifie par m.

$$g = \frac{G\,M_T}{(R_T+h)^2}$$

COMPRENDRE
La masse m disparaît : g ne dépend que de l'astre et de l'altitude, pas de l'objet qui tombe.

1.3 Partie A. Calculer l'intensité de la pesanteur à l'altitude de 40 km.

Données utiles $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg ; $R_T = 6{,}37 \times 10^{3}$ km ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ S.I. ; $h = 40$ km

Les longueurs sont converties en mètres : $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m et $h = 4{,}0 \times 10^{4}$ m.

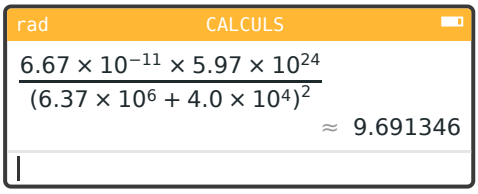
$$g = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}}{(6{,}37 \times 10^{6} + 4{,}0 \times 10^{4})^2} = 9{,}69\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$g \approx 9{,}7\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$ à 40 km d'altitude

PIÈGE
Laisser R_T et h en kilomètres : le résultat serait un million de fois trop grand. La constante G impose des mètres.

COMPRENDRE
L'altitude n'a que deux chiffres significatifs : on annonce $9{,}7$. À 40 km, g n'a baissé que d'environ 1 % par rapport au sol, ce qui justifie de le prendre constant ensuite.

À LA CALCULATRICE



2.1 Partie A. Qu'appelle-t-on une chute libre ?

Un système est en chute libre lorsqu'il n'est soumis qu'à son poids.

COMPRENDRE
« Libre » ne veut pas dire verticale ni sans vitesse initiale : un projectile lancé en oblique dans le vide est aussi en chute libre. Ici, l'air raréfié rend le modèle acceptable au début du saut.

2.2 Partie A. Établir l'expression de l'accélération du parachutiste lors de cette phase du saut.

Système {parachutiste et équipement}, de masse m ; référentiel terrestre supposé galiléen ; seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $m\,\vec{a} = m\,\vec{g}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Sur un axe Ox vertical dirigé vers le bas, d'origine la position de départ : $a_x = g$.

$\vec{a} = \vec{g}$: accélération verticale, vers le bas, de valeur $a = g = 9{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi de Newton, puis projection sur un axe dont on précise le sens et l'origine.

2.3 Partie A. Établir la relation entre la vitesse v et la durée de chute t. Vérifier que la durée t_1 nécessaire pour atteindre la « vitesse » du son est bien celle annoncée dans le texte.

Données utiles $g = 9{,}7\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$; $v_1 = 1067\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$; vitesse initiale nulle

$a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = g$, donc par intégration $v_x = g\,t + C$. À $t = 0$, $v_x = 0$: $C = 0$. D'où $v = g\,t$.

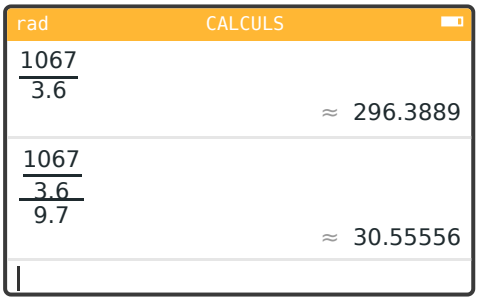
Conversion : $v_1 = \dfrac{1067}{3{,}6} = 296\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

$$t_1 = \frac{v_1}{g} = \frac{296}{9{,}7} = 31\ \mathrm{s}$$

$v = g\,t$ et $t_1 \approx 31$ s, en accord avec les « trente secondes environ » du texte.

PIÈGE
Diviser des $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ par g : on trouverait 110, sans signification. La vitesse doit être en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (division par 3,6).

À LA CALCULATRICE



2.4 Partie A. Établir la relation entre la distance x parcourue et la durée de chute. Calculer la distance x_1 parcourue quand la « vitesse » du son est atteinte, puis l'altitude h_1 du parachutiste.

Données utiles $v_1 = 296\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $t_1 = v_1/g$ (2.3) ; altitude de départ $h_0 = 40$ km

$v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g\,t$, donc $x = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + C'$. À $t = 0$, $x = 0$: $C' = 0$. D'où $x = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2$.

Avec $t_1 = \dfrac{v_1}{g}$: $\quad x_1 = \dfrac{1}{2}\,g\,\dfrac{v_1^2}{g^2} = \dfrac{v_1^2}{2\,g}$

$$x_1 = \frac{296^2}{2 \times 9{,}7} = 4{,}5 \times 10^3\ \mathrm{m}$$

Altitude : $h_1 = h_0 - x_1 = 40 - 4{,}5 \approx 35$ km.

$x = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2$; $x_1 = 4{,}5 \times 10^3$ m ; $h_1 \approx 35$ km

MÉTHODE
Remplacer t_1 par v_1/g avant de calculer : on part des données de l'énoncé et non d'un résultat déjà arrondi.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{\left(\dfrac{1067}{3.6}\right)^2}{2 \times 9.7} \approx 4528.164$

$40 - 4.528 \approx 35.472$

3.1 Partie A. Pour le son, le terme de célérité est préférable à celui de vitesse. Expliquer.

Le son est une onde mécanique : c'est une perturbation qui se propage dans l'air sans transport de matière, alors que le mot « vitesse » décrit le déplacement d'un objet matériel.

On parle de célérité parce que c'est la perturbation qui avance, pas la matière.

COMPRENDRE
Les tranches d'air vibrent autour de leur position et y reviennent ; seule l'énergie est transportée de proche en proche.

3.2 Partie A. La célérité du son étant proportionnelle à la racine carrée de la température absolue, déterminer la température θ_1 de l'atmosphère pour laquelle la célérité vaut v_1.

Données utiles $v_1 = 1067\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$; $v_0 = 1193\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ à $\theta_0 = 0\ ^\circ\text{C}$; $T = \theta + 273$

$v = K\sqrt{T}$, donc $\dfrac{v_1}{v_0} = \sqrt{\dfrac{T_1}{T_0}}$, soit $T_1 = T_0 \left(\dfrac{v_1}{v_0}\right)^2$ avec $T_0 = 273$ K.

$$T_1 = 273 \times \left(\frac{1067}{1193}\right)^2 = 218\ \text{K}$$

$\theta_1 = T_1 - 273 = 218 - 273 = -55\ ^\circ\text{C}$

$\theta_1 \approx -55\ ^\circ\text{C}$ (soit $T_1 = 218$ K)

PIÈGE
Appliquer la proportionnalité à la température en degrés Celsius : avec $\theta_0 = 0\ ^\circ\text{C}$, le calcul n'aurait aucun sens. La loi porte sur les kelvins.

COMPRENDRE
Dans un rapport, les unités se simplifient : les deux célérités peuvent rester en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$273 \times \left(\dfrac{1067}{1193}\right)^2 \approx 218.3789$

$218 - 273 = -55$

1.1 Partie B. Déterminer l'unité du coefficient k à l'aide des unités fondamentales du système international.

Données utiles $F = k\,v^2$

$k = \dfrac{F}{v^2}$. Une force est le produit d'une masse par une accélération : $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Et v^2 s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

k s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$: $k = 0{,}28\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$

PIÈGE
Répondre $\text{N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$: c'est homogène, mais le newton n'est pas une unité fondamentale. Il faut le décomposer.

1.2 Partie B. Faire le bilan des actions exercées sur le système, établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse et montrer qu'elle s'écrit numériquement $\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - 0{,}0035\,v^2$.

Données utiles $m = 80$ kg ; $k = 0{,}28$ kg · m^{-1} ; $g_0 = 9{,}8$ N · kg^{-1}

Système {parachutiste et équipement} ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Forces : le poids $\vec{P}$, vertical vers le bas, de valeur $m\,g_0$; la force de frottement de l'air $\vec{F}$, verticale vers le haut (opposée au mouvement), de valeur $k\,v^2$. La poussée d'Archimède est négligée.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{a}$. En projection sur un axe vertical dirigé vers le bas :

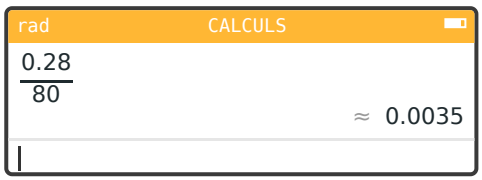
$$m\,g_0 - k\,v^2 = m\,\frac{dv}{dt} \quad \text{soit} \quad \frac{dv}{dt} = g_0 - \frac{k}{m}\,v^2$$

Avec $\frac{k}{m} = \frac{0{,}28}{80} = 0{,}0035$ m^{-1} :

$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - 0{,}0035\,v^2$, avec v en m · s^{-1} : c'est l'équation attendue.

PIÈGE
Oublier de diviser par m et écrire $9{,}8 - 0{,}28\,v^2$, ou se tromper de signe : le frottement s'oppose toujours au mouvement.

À LA CALCULATRICE



1.3.1 Partie B. À partir de la courbe $v = f(t)$ de l'annexe 1, déterminer la vitesse limite et le temps caractéristique du mouvement.

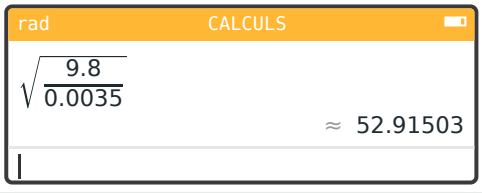
La courbe tend vers une asymptote horizontale : $v_{lim} \approx 53$ m · s^{-1}.

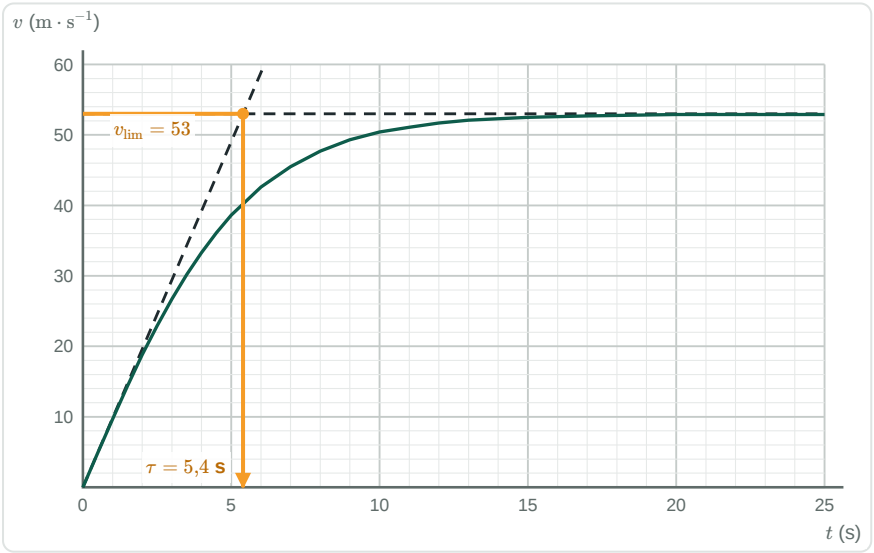
On trace la tangente à la courbe à l'origine : elle coupe l'asymptote à la date $t = \tau$. On lit $\tau \approx 5{,}4$ s.

$v_{lim} \approx 53$ m · s^{-1} et $\tau \approx 5{,}4$ s

COMPRENDRE
La lecture dépend du tracé de la tangente : toute valeur de τ entre 5 s et 6 s est recevable. Le calcul confirme la vitesse limite : $\sqrt{9{,}8/0{,}0035} = 52{,}9$ m · s^{-1}.

À LA CALCULATRICE





1.3.1 · Annexe 1 : tangente à l'origine et asymptote

1.3.2 Partie B. Comment retrouver, à partir de ce document, une valeur approchée de l'intensité de la pesanteur ?

Données utiles $v_{\text{lim}} = 53\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\tau = 5{,}4\ \text{s}$ (1.3.1)

À $t = 0$, $v = 0$: l'équation différentielle donne $\dfrac{\text{d}v}{\text{d}t} = g_0$. Le coefficient directeur de la tangente à l'origine est donc égal à g_0.

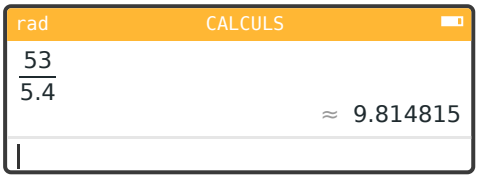
Cette tangente passe par l'origine et par le point $(\tau\ ;\ v_{\text{lim}})$:

$$g_0 \approx \frac{v_{\text{lim}}}{\tau} = \frac{53}{5{,}4} = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

La pente de la tangente à l'origine donne $g_0 \approx 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

COMPRENDRE
Au départ, la vitesse est nulle, donc le frottement aussi : le parachutiste est en chute libre pendant un court instant. Autre voie : en régime permanent, $g_0 = \dfrac{k}{m}\,v_{\text{lim}}^2$.

À LA CALCULATRICE



1.4.1 Partie B. Quel est le pas Δt utilisé pour les calculs de la méthode d'Euler ?

Deux dates consécutives du tableau sont séparées de $0{,}10$ s.

$\Delta t = 0{,}10\ \text{s}$

1.4.2 Partie B. Expliquer la méthode d'Euler en calculant l'accélération à la date $t_4 = 0{,}40$ s et la vitesse à la date $t_5 = 0{,}50$ s.

Données utiles $v_4 = 3{,}92\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (tableau) ; $\Delta t = 0{,}10\ \text{s}$ (1.4.1)

La méthode avance pas à pas, en deux temps à chaque date.

Connaissant v_4, l'équation différentielle donne l'accélération à cette date :

$$a_4 = 9{,}8 - 0{,}0035 \times v_4^2 = 9{,}8 - 0{,}0035 \times 3{,}92^2 = 9{,}75\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

On suppose ensuite l'accélération constante pendant la durée Δt :

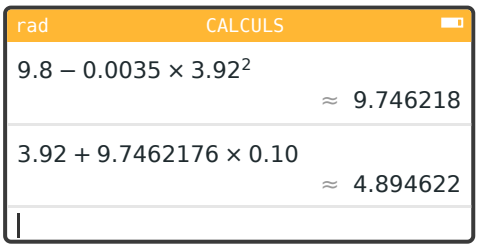
$$v_5 = v_4 + a_4\,\Delta t = 3{,}92 + 9{,}75 \times 0{,}10 = 4{,}89\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$a_4 = 9{,}75\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $v_5 = 4{,}89\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, comme dans le tableau.

PIÈGE
Calculer v_5 avec a_5, encore inconnue à ce stade. Garder aussi a_4 non arrondie dans la calculatrice : avec $9{,}75$ on obtient $4{,}895$.

MÉTHODE
Euler : 1) a_n par l'équation différentielle ; 2) $v_{n+1} = v_n + a_n\,\Delta t$; 3) on recommence. Plus le pas est petit, plus le résultat est précis.

À LA CALCULATRICE



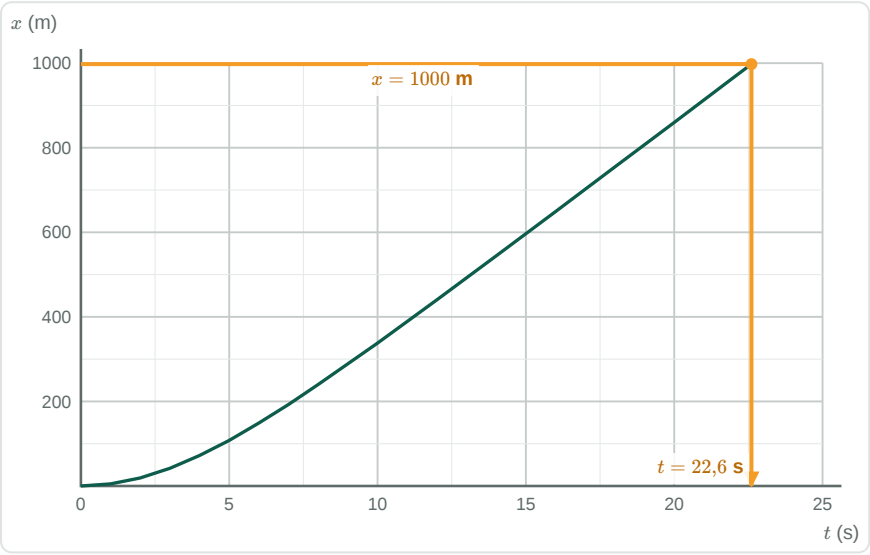
1.5 Partie B. À l'aide de la courbe $x = f(t)$ de l'annexe 1, déterminer la date à laquelle le parachutiste atteindrait le sol s'il n'ouvrait pas son parachute.

Données utiles altitude de départ : 1000 m

Le parachutiste part de 1000 m d'altitude : il touche le sol lorsque la distance parcourue vaut $x = 1000$ m. On lit sur la courbe l'abscisse du point d'ordonnée 1000 m.

Il atteindrait le sol à $t \approx 22{,}6$ s (environ 23 s).

COMPRENDRE
Après une dizaine de secondes, la courbe $x = f(t)$ est une droite : la vitesse est constante et sa pente vaut v_{lim}.



1.5 · Annexe 1 : lecture de la date pour $x = 1000$ m

2.1 Partie B. Le parachute ouvert, la force de frottement devient $F' = k' v^2$. À l'aide de l'expression littérale de la vitesse limite, déterminer la valeur de k'.

Données utiles $v'_{\text{lim}} = 4{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $m = 80$ kg ; $g_0 = 9{,}8\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$

Quand la vitesse limite est atteinte, v est constante : $\dfrac{\text{d}v}{\text{d}t} = 0$.

L'équation différentielle devient $g_0 - \dfrac{k'}{m} v'^2_{\text{lim}} = 0$, d'où

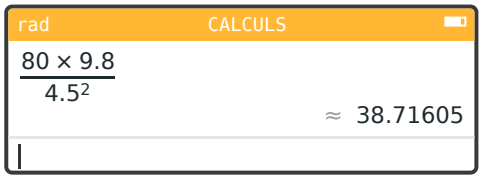
$$v'_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{m\,g_0}{k'}} \quad \text{et} \quad k' = \frac{m\,g_0}{v'^2_{\text{lim}}}$$

$$k' = \frac{80 \times 9{,}8}{4{,}5^2} = 39\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

$k' = 39\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$

COMPRENDRE
À vitesse limite, le frottement compense exactement le poids. Le parachute multiplie le coefficient par environ 140 : la vitesse limite, elle, est divisée par $\sqrt{140} \approx 12$.

À LA CALCULATRICE



2.2 Partie B. Représenter sur l'annexe 2 l'évolution de la vitesse au cours du temps pour l'ensemble du saut.

Données utiles ouverture du parachute à $t = 12$ s ; stabilisation en 4 s à $4{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

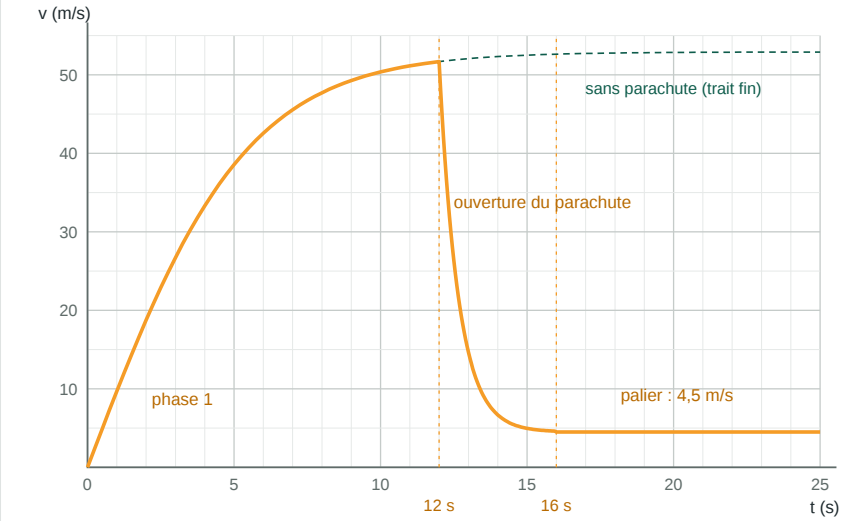
De 0 à 12 s : la courbe se confond avec le trait fin (parachute fermé) ; à 12 s, $v \approx 52\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

De 12 s à 16 s : la vitesse chute rapidement, de plus en plus lentement à l'approche de la valeur limite.

Après 16 s : palier horizontal à $4{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Courbe en trois parties : montée jusqu'à 12 s, chute de 12 s à 16 s, palier à $4{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

PIÈGE
Tracer une chute verticale à 12 s : la vitesse ne peut pas changer instantanément. Elle reste continue et rejoint le palier progressivement.



2.2 · Annexe 2 complétée : vitesse au cours de l'ensemble du saut (tracé de l'élève en orange)