Mise en orbite d'un satellite artificiel par la fusée Ariane

Bac S 2003 Inde (Pondichéry) (ancien programme) · Exercice 4 **6 points** **Durée conseillée 1 h 18**

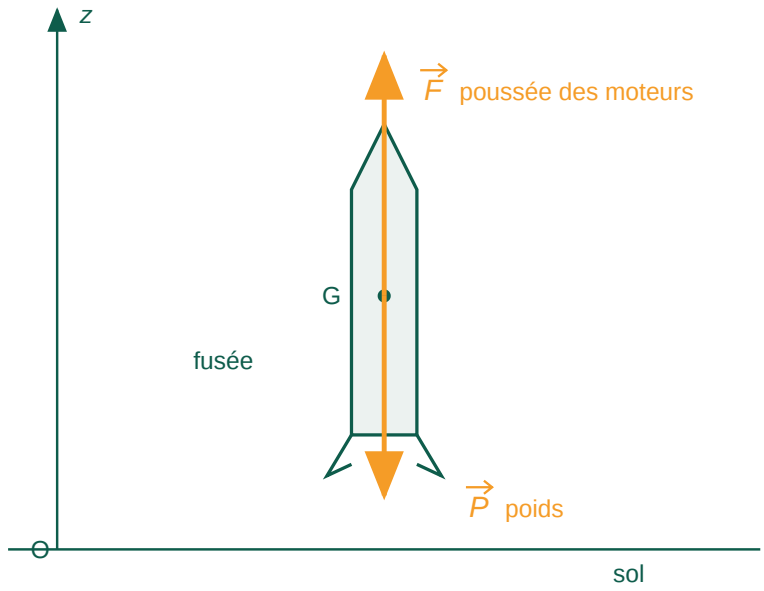
1.a Représenter sur un schéma, en les nommant, les deux forces qui agissent sur la fusée lorsqu'elle s'élève verticalement.

Système {fusée}, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Frottements et poussée d'Archimède sont négligés ; il reste deux forces, appliquées au centre d'inertie G :

- le poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas, de valeur $P = m\,g_0$;
- la force de poussée $\vec{F}$ des moteurs, verticale, vers le haut, de valeur $F = 2445$ kN.

Schéma : $\vec{P}$ vers le bas et $\vec{F}$ vers le haut, avec $\vec{F}$ plus long que $\vec{P}$ puisque la fusée s'élève en accélérant.

PIÈGE
Tracer deux flèches de même longueur : la fusée ne décollerait pas. Au décollage, $P = 208 \times 10^3 \times 9{,}8 \approx 2{,}0 \times 10^3$ kN, inférieur à F.



1.a · Les deux forces appliquées à la fusée (au décollage, $F > P$)

1.b La masse de la fusée étant m à un instant quelconque, exprimer la valeur de l'accélération a en fonction de m et des intensités des deux forces.

Deuxième loi de Newton appliquée à la fusée dans le référentiel terrestre : $\vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{a}$.

Projection sur l'axe Oz dirigé vers le haut : $-P + F = m\,a_z$.

$$a = \frac{F - P}{m}, \text{ soit avec } P = m\,g_0 : a = \frac{F}{m} - g_0$$

COMPRENDRE
La masse de la fusée diminue au cours du vol. On applique ici la loi à un instant donné, avec la masse m qu'a la fusée à cet instant, comme le demande l'énoncé.

1.c Calculer l'accélération a_1 au décollage, puis la masse m_2 et l'accélération a_2 juste avant l'épuisement du peroxyde d'azote. Le mouvement d'ascension est-il uniformément accéléré ?

Données utiles $m_1 = 208$ t ; masse de peroxyde emportée : $147{,}5$ t ; $F = 2445$ kN ; $g_0 = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Au décollage, $m_1 = 208 \times 10^3$ kg :

$$a_1 = \frac{F}{m_1} - g_0 = \frac{2445 \times 10^3}{208 \times 10^3} - 9{,}8 = 2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Juste avant la fin de la combustion, tout le peroxyde a quitté la fusée :

$$m_2 = m_1 - 147{,}5 \times 10^3 = 208 \times 10^3 - 147{,}5 \times 10^3 = 60{,}5 \times 10^3 \text{ kg}$$

$$a_2 = \frac{F}{m_2} - g_0 = \frac{2445 \times 10^3}{60{,}5 \times 10^3} - 9{,}8 = 30{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

L'accélération passe de $2{,}0$ à $30{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$: elle n'est pas constante.

$a_1 = 2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $m_2 = 60{,}5 \times 10^3$ kg ; $a_2 = 30{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$: le mouvement est accéléré, mais pas uniformément.

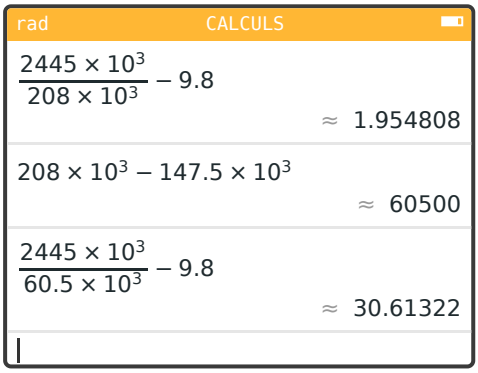
PIÈGE

Laisser les masses en tonnes et la force en kN ne change pas le quotient, mais oublier de retrancher g_0 donne $11{,}8$ et $40{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$: ces valeurs ignorent le poids.

COMPRENDRE

Chiffres significatifs : dans une différence, on garde la décimale du terme le moins précis. Ici $g_0 = 9{,}8$ est connu au dixième, donc a_1 et a_2 s'arrondissent au dixième.

À LA CALCULATRICE



1.d Vérifier l'unité de V_e par analyse dimensionnelle et calculer sa valeur. Donner le signe de $\dfrac{\Delta t}{\Delta m}$, en déduire le sens de $\vec{V}_e$ et commenter. Expliquer, à l'aide d'une loi énoncée, pourquoi l'éjection des gaz propulse la fusée vers le haut.

Données utiles $\vec{V}_e = \dfrac{\Delta t}{\Delta m}\vec{F}$; $F = 2445$ kN ; durée de fonctionnement : 145 s ; masse de peroxyde consommée : $147{,}5$ t

Unité. Une force est le produit d'une masse par une accélération : $[F] = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$. Donc

$$[V_e] = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{M}} \times \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2} = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}$$

V_e est bien homogène à une vitesse et s'exprime en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Valeur. Pendant $\Delta t = 145$ s, la masse de la fusée varie de $|\Delta m| = 147{,}5 \times 10^3$ kg :

$$V_e = \frac{\Delta t}{|\Delta m|}F = \frac{145}{147{,}5\times 10^3} \times 2445 \times 10^3 = 2{,}40 \times 10^3\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Signe et sens. La fusée perd de la masse : $\Delta m < 0$ alors que $\Delta t > 0$, donc $\dfrac{\Delta t}{\Delta m} < 0$. Le vecteur $\vec{V}_e$ est donc de sens opposé à $\vec{F}$: il est dirigé vers le bas. C'est cohérent, les gaz sortent des tuyères vers l'arrière de la fusée.

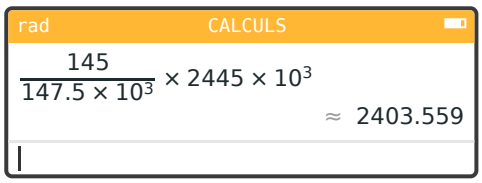
Propulsion. Troisième loi de Newton (principe des actions réciproques) : si un corps A exerce sur un corps B une force $\vec{F}_{A/B}$, alors B exerce sur A une force $\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$. La fusée pousse les gaz vers le bas ; les gaz exercent donc sur la fusée une force de même valeur dirigée vers le haut : c'est la poussée $\vec{F}$.

$V_e = 2{,}40 \times 10^3\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$; $\dfrac{\Delta t}{\Delta m} < 0$, donc $\vec{V}_e$ est vers le bas, opposé à $\vec{F}$.

PIÈGE
Dire que les gaz « s'appuient sur l'air » ou sur le sol. La poussée vient de l'interaction entre la fusée et ses propres gaz : elle existe aussi dans le vide.

MÉTHODE
Pour la dimension d'une force, partir d'une relation connue, $P = m\,g$ ou $F = m\,a$: une masse multipliée par une longueur, divisée par un temps au carré.

À LA CALCULATRICE



2.a Préciser les caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}$ d'un point en mouvement circulaire uniforme de rayon r et de vitesse v.

Dans le repère de Frenet $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$: $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_T + \dfrac{v^2}{r}\vec{u}_N$. Le mouvement est uniforme, donc $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$.

- Direction : celle du rayon du cercle (perpendiculaire à la vitesse).
- Sens : vers le centre du cercle (accélération centripète).
- Valeur : constante, $a = \dfrac{v^2}{r}$.

$\vec{a} = \dfrac{v^2}{r}\vec{u}_N$: radial, centripète, de valeur $\dfrac{v^2}{r}$

PIÈGE
Écrire que l'accélération est nulle parce que la vitesse est constante. Seule la valeur de la vitesse est constante ; sa direction change, donc $\vec{a} \neq \vec{0}$.

2.b Énoncer la loi de la gravitation universelle et faire un schéma où figurent les vecteurs forces.

Deux corps ponctuels (ou à répartition sphérique de masse) A et B, de masses m_A et m_B, dont les centres sont distants de d, exercent l'un sur l'autre des forces attractives, portées par la droite (AB), de sens opposés et de même valeur :

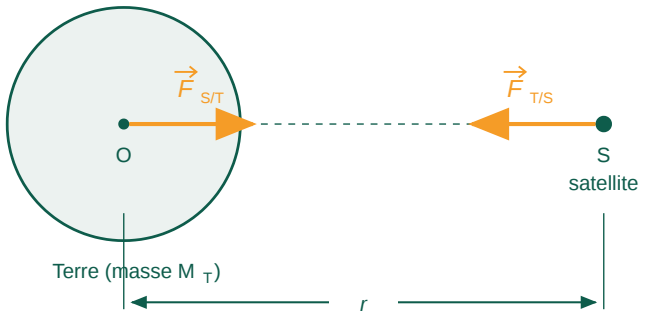
$$F_{A/B} = F_{B/A} = G\,\frac{m_A\,m_B}{d^2}$$

avec les masses en kg, d en m, F en N et G la constante de gravitation universelle.

Sous forme vectorielle, avec $\vec{u}_{AB}$ unitaire dirigé de A vers B : $\vec{F}_{A/B} = -G\,\frac{m_A\,m_B}{d^2}\,\vec{u}_{AB} = -\vec{F}_{B/A}$.

Pour la Terre et le satellite : $F_{T/S} = F_{S/T} = G\,\frac{m_S\,M_T}{r^2}$, forces dirigées chacune vers l'autre corps.

PIÈGE
Dessiner la force subie par le satellite plus courte que celle subie par la Terre. Les deux forces ont la même valeur, même si les masses sont très différentes.



2.b · Interaction gravitationnelle Terre-satellite : deux forces opposées, de même valeur

2.c Exprimer $g(h)$ en fonction de M_T, R_T, h et G, puis en fonction de R_T, h et $g_0 = g(0)$.

La force exercée par la Terre sur le satellite a pour valeur $F_S = G\,\frac{m_S\,M_T}{(R_T+h)^2}$, et par définition $F_S = m_S\,g(h)$. En simplifiant par m_S :

$$g(h) = \frac{G\,M_T}{(R_T+h)^2}$$

Au sol, $h = 0$: $g_0 = \frac{G\,M_T}{R_T^2}$, donc $G\,M_T = g_0\,R_T^2$. En remplaçant :

$$g(h) = \frac{G\,M_T}{(R_T+h)^2} = g_0\,\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$$

COMPRENDRE
L'énoncé écrit $r = R + h$: il faut lire $r = R_T + h$. La distance qui intervient est celle entre le centre de la Terre et le satellite, jamais l'altitude seule.

MÉTHODE
Remplacer $G\,M_T$ par $g_0\,R_T^2$ permet de se passer de G et de M_T, que l'énoncé ne donne pas : l'astuce sert dans tous les calculs de satellites.

2.d Appliquer la deuxième loi de Newton au satellite en orbite circulaire. En déduire l'expression de sa vitesse v_S en fonction de g_0, R_T et h, puis celle de sa période de révolution T_S.

Système {satellite}, référentiel géocentrique supposé galiléen, seule force : $\vec{F}_S = m_S\,\vec{g}(h)$, dirigée vers O.

Deuxième loi de Newton : $m_S\,\vec{g}(h) = m_S\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}(h)$: l'accélération est centripète, de valeur $g(h)$.

Le mouvement étant circulaire uniforme de rayon $R_T + h$ (2.a) : $a = \dfrac{v_S^2}{R_T + h}$. Avec 2.c :

$$\frac{v_S^2}{R_T + h} = g_0\,\frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \quad \text{d'où} \quad v_S = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}}$$

Le satellite parcourt la circonférence $2\pi(R_T + h)$ à la vitesse v_S pendant une période :

$$T_S = \frac{2\pi\,(R_T + h)}{v_S} = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0}}$$

$$\boxed{v_S = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}}\ ;\ T_S = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0}}}$$

PIÈGE
Garder le référentiel terrestre de la partie 1. Le satellite tourne autour du centre de la Terre : l'étude se fait dans le référentiel géocentrique.

COMPRENDRE
La masse m_S se simplifie : vitesse et période ne dépendent que de l'altitude. Tous les satellites en orbite circulaire à 200 km ont la même vitesse.

2.e Calculer v_S et T_S.

Données utiles $g_0 = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $h = 200$ km ; $R_T = 6400$ km

En mètres : $R_T = 6{,}400 \times 10^6$ m et $R_T + h = 6{,}600 \times 10^6$ m.

$$v_S = 6{,}400 \times 10^6 \times \sqrt{\frac{9{,}8}{6{,}600 \times 10^6}} = 7{,}8 \times 10^3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$T_S = \frac{2\pi}{6{,}400 \times 10^6} \times \sqrt{\frac{(6{,}600 \times 10^6)^3}{9{,}8}} = 5{,}3 \times 10^3\ \text{s}$$

$v_S = 7{,}8 \times 10^3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (soit $7{,}8\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$) ; $T_S = 5{,}3 \times 10^3$ s (environ 1 h 29 min)

PIÈGE
Laisser R_T et h en kilomètres alors que g_0 est en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$: le résultat serait faux d'un facteur $\sqrt{1000}$. Tout convertir en mètres avant le calcul.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme g_0. En orbite basse, un satellite fait le tour de la Terre en une heure et demie environ, bien moins que les 24 h d'un satellite géostationnaire.

À LA CALCULATRICE

