2003 Pondichéry

II. Mise en orbite d'un satellite artificiel par la fusée Ariane (6 points)

D'après Encyclopedia Universalis (1998) :

(Certains renseignements et données sont nécessaires à la résolution du sujet).

Le premier lanceur Ariane est une fusée à trois étages dont la hauteur totale est de 47,4 m et qui pèse, avec sa charge utile (satellite), 208 tonnes au décollage.
Le premier étage qui fonctionne pendant 145 secondes est équipé de 4 moteurs Viking V alimentés par du peroxyde d'azote N_2O_4 (masse de peroxyde emportée : 147,5 tonnes).
L'intensité de la force de poussée totale $\vec{F}$ de ces 4 réacteurs est constante pendant leur fonctionnement: elle vaut F = 2445 kN.
Ce lanceur peut mettre en orbite circulaire basse de 200 km d'altitude un satellite de 4850 kg; il peut également placer sur une orbite géostationnaire un satellite de 965 kg; il peut aussi être utilisé pour placer en orbite héliosynchrone des satellites très utiles pour des applications météorologiques.

1) L'ascension de la fusée Ariane

Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme : son intensité est $g_0 = 9{,}8$ m.s $^{-2}$.
On choisit un axe Oz vertical dirigé vers le haut.
On étudie le mouvement de la fusée dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen.

a) Représenter clairement, sur un schéma, en les nommant, les deux forces qui agissent sur la fusée Ariane lorsqu'elle s'élève verticalement. On néglige les frottements et la poussée d'Archimède dans l'air.

b) A un instant quelconque, la masse de la fusée est m.
Déterminer en fonction de m et des intensités des 2 forces précédentes la valeur de l'accélération a.

c) On considère d'abord la situation au décollage. La masse de la fusée vaut alors m_1. Calculer la valeur numérique de l'accélération a_1 à cet instant.
On envisage la situation qui est celle immédiatement avant que tout le peroxyde d'azote ne soit consommé. La masse de la fusée vaut alors m_2. Calculer la valeur numérique de m_2 puis celle de l'accélération a_2 à cet instant.
Le mouvement d'ascension de la fusée est-il uniformément accéléré ?

d) La vitesse d'éjection $\overrightarrow{V_e}$ des gaz issus de la combustion du peroxyde d'azote est donnée par la relation :

$$\overrightarrow{V_e} = \frac{\Delta t}{\Delta m}.\vec{F}$$

où $\frac{\Delta t}{\Delta m}$ est l'inverse de la variation de masse de la fusée par unité de temps et caractérise la consommation des moteurs.
Vérifier l'unité de V_e par analyse dimensionnelle. Calculer la valeur numérique de V_e.
Quel est le signe de $\frac{\Delta t}{\Delta m}$? En déduire le sens de $\overrightarrow{V_e}$. Qu'en pensez-vous ?
A l'aide d'une loi connue qu'on énoncera, expliquer pourquoi l'éjection des gaz propulse la fusée vers le haut.

2) Étude du satellite artificiel situé à basse altitude (h = 200 km)

On s'intéresse au mouvement d'un satellite artificiel S, de masse m_s, en orbite circulaire (rayon r) autour de la Terre de masse M_T, de rayon R_T et de centre O.
On suppose que la Terre est une sphère et qu'elle présente une répartition de masse à symétrie sphérique et que le satellite peut être assimilé à un point.

a) Préciser les caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}$ d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon r et de vitesse v.

b) Enoncer la loi de la gravitation universelle. On appelle G la constante de gravitation universelle.
Faire un schéma sur lequel les vecteurs-forces sont représentés.

c) Le satellite S est à l'altitude h : on a donc r = R + h.
On appelle $\overrightarrow{F_S}$ la force qu'exerce la Terre sur le satellite. Cette force dépend de la position du satellite et on pose $\overrightarrow{F_S} = m_s.\vec{g}(h)$. On note g(h) l'intensité de la pesanteur $\vec{g}(h)$ à l'endroit où se trouve le satellite: $\left|\overrightarrow{g(h)}\right| = g(h)$.
Exprimer g(h) en fonction de M_T, R_T, h et G puis g(h) en fonction de R_T, h et $g_0 = g(0)$.

d) Appliquer la deuxième loi de NEWTON au satellite en orbite circulaire.
En déduire l'expression de la vitesse v_s du satellite en fonction de g_0 , R_T et h puis celle de sa période de révolution Ts.

e) Application numérique.
Calculer v_s et T_s sachant que $g_0 = 9{,}8\ m.s^{-2}$; h = 200 km et R_T = 6400 km.