Oscillations libres et forcées

Bac S 2003 La Réunion (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

A.1 À partir de la mesure observée, calculer la valeur k' de la raideur du ressort.

Données utiles $m = 100$ g ; $l_0 = 10{,}0$ cm ; $l = 12{,}4$ cm ; $g = 10\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; aide : $\dfrac{1}{2{,}4} = 0{,}42$

Système {masse m}, référentiel terrestre supposé galiléen. Forces : le poids $\vec{P}$ (vertical, vers le bas) et la force de rappel $\vec{F}$ du ressort (verticale, vers le haut).

La masse est immobile : d'après le principe d'inertie, $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$, donc $F = P$, soit $k'\,(l - l_0) = m\,g$.

$$k' = \frac{m\,g}{l - l_0} = \frac{0{,}100 \times 10}{(12{,}4 - 10{,}0) \times 10^{-2}} = \frac{1{,}0}{2{,}4 \times 10^{-2}} = 0{,}42 \times 10^{2}$$

$$\boxed{k' = 42\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}}$$

PIÈGE
Laisser m en grammes ou l'allongement en centimètres : on trouverait une raideur fausse d'un facteur 10 ou 1000. Tout se convertit en kg et en m.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme g et l'allongement $2{,}4$ cm. L'oscillateur masse-ressort ne figure plus au programme actuel de spécialité ; l'équilibre d'un solide soumis à deux forces, lui, se traite toujours ainsi.

MÉTHODE
Sans calculatrice, on isole les puissances de dix : $\dfrac{1{,}0}{2{,}4 \times 10^{-2}} = \dfrac{1}{2{,}4} \times 10^{2}$, puis on utilise l'aide de calcul fournie en fin d'énoncé.

A.2 Quelle est l'erreur relative commise par rapport à la valeur de k indiquée par le fournisseur ?

Données utiles $k = 40\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$; $k' = 42\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ (A.1)

$$\frac{|k' - k|}{k} = \frac{42 - 40}{40} = \frac{2}{40} = 0{,}05$$

L'erreur relative est de $5\ \%$: la mesure confirme la valeur du fournisseur à $5\ \%$ près.

PIÈGE
Diviser par la valeur mesurée k' : la référence est la valeur annoncée par le fournisseur, c'est elle qui va au dénominateur.

B.1 Indiquer comment mesurer la période des oscillations de la masse m suspendue au ressort et donner sa valeur.

Données utiles figure a de l'annexe

La période T est la durée qui sépare deux passages consécutifs de la masse par la même position, dans le même sens. Pour gagner en précision, on mesure la durée de plusieurs périodes puis on divise.

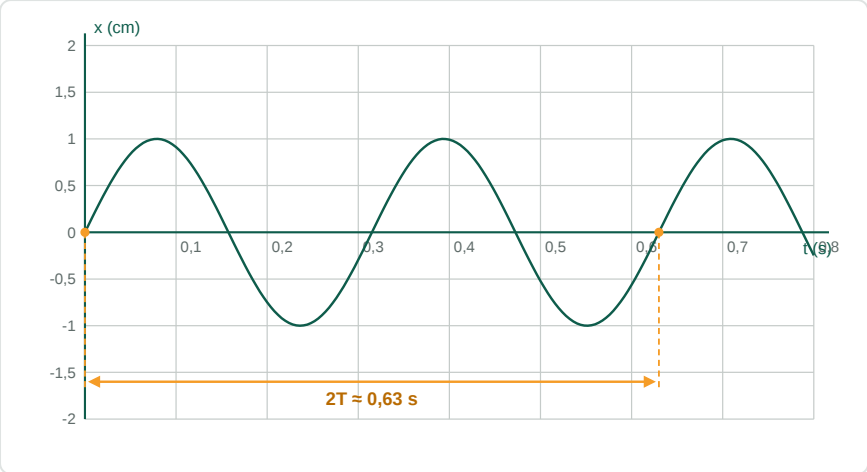
Sur la figure a, la courbe part de $x = 0$ en montant à $t = 0$ et repasse par $x = 0$ en montant, pour la deuxième fois, à $t \approx 0{,}63$ s : cela représente deux périodes.

$$T = \frac{0{,}63}{2}$$

$$\boxed{T \approx 0{,}32\ \text{s}}$$

PIÈGE
Prendre la durée entre deux annulations successives de x : la masse y passe une fois en montant, une fois en descendant, on ne lit alors qu'une demi-période.

MÉTHODE
Repérer les passages par $x = 0$ plutôt que les sommets : la courbe y est la plus raide, la date se lit donc plus nettement que sur un maximum arrondi.



B.1 · Figure a : deux périodes entre deux passages par $x = 0$ dans le même sens

B.2 Cette valeur est-elle en accord avec la valeur théorique $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$?

Données utiles $m = 100$ g ; $k = 40\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$; $\pi = 3{,}14$; $T \approx 0{,}32$ s (B.1)

$$\frac{m}{k} = \frac{0{,}100}{40} = 2{,}5 \times 10^{-3} = 25 \times 10^{-4}\ \text{s}^2 \quad \text{donc} \quad \sqrt{\frac{m}{k}} = 5{,}0 \times 10^{-2}\ \text{s}$$

$$T = 2\pi \times 5{,}0 \times 10^{-2} = \frac{\pi}{10} = 0{,}31\ \text{s}$$

L'écart avec la mesure est de $0{,}01$ s, soit environ $3\ \%$: il est de l'ordre de la précision de lecture du graphique.

$T_{\text{théorique}} = 0{,}31$ s : la valeur mesurée ($0{,}32$ s) est en accord avec la théorie.

COMPRENDRE
Avec la raideur mesurée $k' = 42\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, la période calculée serait encore un peu plus courte. Un écart de quelques pour cent reste compatible avec les incertitudes sur k et sur la lecture.

MÉTHODE
Pour une racine sans calculatrice, écrire le nombre avec une puissance de dix paire : 25×10^{-4} donne 5×10^{-2}.

B.3 Sachant que le newton a la dimension $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, montrer que T s'exprime en secondes.

k s'exprime en $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, soit $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{m}^{-1} = \text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$.

Le rapport $\dfrac{m}{k}$ s'exprime donc en $\dfrac{\text{kg}}{\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}} = \text{s}^2$, et sa racine carrée en s.

Le facteur 2π n'a pas d'unité.

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ s'exprime bien en secondes.

PIÈGE
Oublier de dire que 2π est un nombre sans dimension : la justification est alors incomplète.

B.4 On remplace la solution par une solution S' plus visqueuse. Dessiner sur la figure b de l'annexe l'allure de la courbe obtenue après une nouvelle acquisition.

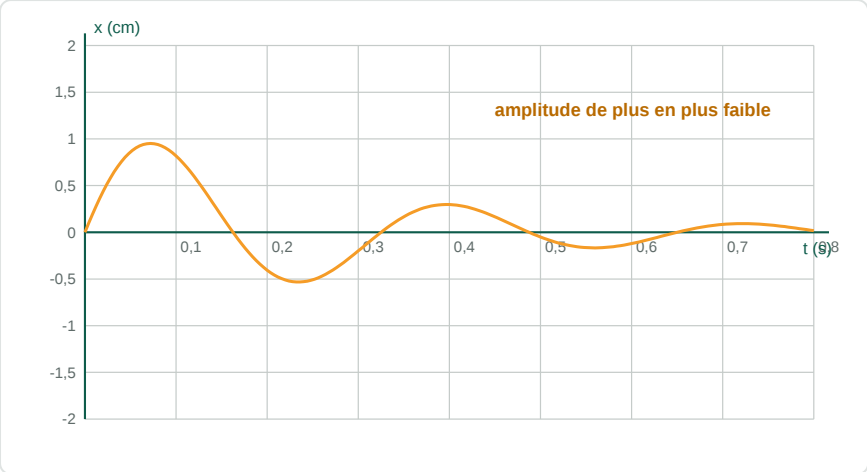
Dans une solution plus visqueuse, les frottements subis par la tige sont plus importants : les oscillations sont amorties.

L'acquisition démarre toujours au passage par la position d'équilibre : la courbe part de $x = 0$. La masse oscille encore de part et d'autre de $x = 0$, mais l'amplitude diminue à chaque oscillation (elle reste inférieure à 1 cm dès le premier maximum).

Courbe pseudo-périodique : oscillations d'amplitude décroissante, de pseudo-période voisine de T (voir figure b).

PIÈGE
Tracer une sinusoïde simplement plus petite, d'amplitude constante : l'amortissement se traduit par des maximums de plus en plus bas.

COMPRENDRE
Les frottements font perdre de l'énergie mécanique à l'oscillateur à chaque aller-retour. Si l'amortissement était très fort, la masse reviendrait à l'équilibre sans osciller (régime apériodique).



B.4 · Figure b complétée : oscillations amorties (régime pseudo-périodique)

C.1 Quel nom donne-t-on au moteur muni de l'excentrique ?

Le moteur impose sa fréquence au ressort et à la masse.

C'est l'**excitateur**.

C.2 Quel nom donne-t-on au système (ressort + masse) ?

Ce système oscille à la fréquence imposée par le moteur, avec une amplitude qui dépend de cette fréquence.

C'est le **résonateur**.

C.3 Quel phénomène obtient-on à $f = 3{,}2$ Hz ?

Données utiles tableau : $x_{\max} = 2{,}3$ cm pour $f = 3{,}2$ Hz, valeurs plus faibles pour toutes les autres fréquences

D'après le tableau, l'amplitude $x_{\max}$ passe par un maximum ($2{,}3$ cm) pour $f = 3{,}2$ Hz.

Il s'agit du phénomène de **résonance** (résonance d'amplitude).

COMPRENDRE
Les oscillations forcées ont toujours la fréquence de l'excitateur ; c'est leur amplitude qui change avec la fréquence et devient maximale à la résonance.

C.4 En déduire la période des oscillations à la résonance.

Données utiles $f = 3{,}2$ Hz ; aide : $\frac{1}{3{,}2} = \frac{\pi}{10}$; $\pi = 3{,}14$

$$T_R = \frac{1}{f} = \frac{1}{3{,}2} = \frac{\pi}{10}$$

$T_R = 0{,}31$ s

C.5 Comparer cette période à celle des oscillations libres.

Données utiles $T_R = 0{,}31$ s (C.4) ; oscillations libres : $T \approx 0{,}32$ s mesurée (B.1), $0{,}31$ s calculée (B.2)

La période à la résonance ($0{,}31$ s) est égale, aux incertitudes de mesure près, à la période des oscillations libres ($0{,}31$ s calculée, $0{,}32$ s mesurée).

$T_R \approx T$: la résonance se produit quand la période de l'excitateur est égale à la période propre du résonateur.

C.6 Quel(s) changement(s) observerait-on si on utilisait la solution visqueuse S' ?

Avec la solution S', l'amortissement est plus important.

L'amplitude à la résonance serait plus faible et le maximum moins marqué : $x_{\max}$ varierait moins autour de $3{,}2$ Hz (résonance « floue »). La fréquence de résonance resterait voisine de la fréquence propre.

Résonance moins aiguë, d'amplitude plus faible ; avec un amortissement très fort, elle disparaît.

PIÈGE
Affirmer que la fréquence de résonance change nettement : l'amortissement agit surtout sur la hauteur et la largeur du pic, très peu sur sa position.

D.1 Expliquer le phénomène d'oscillations de forte amplitude à la vitesse V_R, en précisant le rôle joué par la piste déformée.

En roulant à vitesse constante, les roues rencontrent les bosses à intervalles de temps réguliers : la piste impose à la suspension des secousses périodiques. Elle joue le rôle d'**excitateur**, l'automobile (masse suspendue aux ressorts) celui de **résonateur**.

La fréquence des secousses dépend de la vitesse. Pour la vitesse V_R, elle est égale à la fréquence propre f_0 du véhicule.

Il y a alors **résonance** : l'amplitude des oscillations de l'automobile devient très grande et la tenue de route se dégrade.

COMPRENDRE
Les amortisseurs servent à limiter l'amplitude à la résonance, comme la solution visqueuse en C.6. Rouler plus vite ou plus lentement que V_R éloigne de la résonance.

D.2 Exprimer la vitesse V_R en fonction de f_0 et L, puis la calculer en $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Données utiles $f_0 = 5{,}0$ Hz ; $L = 80$ cm

À la vitesse V, la durée entre deux bosses successives est $\Delta t = \dfrac{L}{V}$: la fréquence des secousses est $f = \dfrac{1}{\Delta t} = \dfrac{V}{L}$.

À la résonance, $f = f_0$, donc $\dfrac{V_R}{L} = f_0$, soit $V_R = L\,f_0$.

$$V_R = 0{,}80 \times 5{,}0 = 4{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4{,}0 \times 3{,}6\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

$$\boxed{V_R = L\,f_0 = 14\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}}$$

PIÈGE
Laisser L en centimètres, ou diviser par $3{,}6$ au lieu de multiplier : $1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 3{,}6\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

COMPRENDRE
Le produit vaut $14{,}4$, arrondi à deux chiffres significatifs comme f_0 et L. C'est une vitesse faible : sur la tôle ondulée, on quitte la résonance en roulant nettement plus vite.