Temps caractéristiques de quelques systèmes

Bac S 2003 Métropole rattrapage (ancien programme) · Exercice 3 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Définir le temps de demi-vie (ou demi-vie).

La demi-vie $t_{1/2}$ d'un noyau radioactif est la durée nécessaire pour que la moitié des noyaux radioactifs initialement présents dans un échantillon se soient désintégrés.

$$N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$$

COMPRENDRE
La définition vaut à partir de n'importe quelle date : pendant chaque durée $t_{1/2}$, la population restante est encore divisée par deux. L'activité de l'échantillon, proportionnelle à N, est divisée par deux en même temps.

1.2 En utilisant la définition du temps de demi-vie, établir l'expression de λ en fonction de $t_{1/2}$.

Données utiles $N = N_0\, e^{-\lambda t}$

À la date $t = t_{1/2}$: $N_0\, e^{-\lambda t_{1/2}} = \dfrac{N_0}{2}$, donc $e^{-\lambda t_{1/2}} = \dfrac{1}{2}$.

On prend le logarithme népérien des deux membres : $-\lambda\, t_{1/2} = \ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

PIÈGE
Oublier le signe : $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$ est négatif, ce qui compense le signe « $-$ » de l'exposant. La constante λ est positive et s'exprime en s^{-1} si $t_{1/2}$ est en secondes.

1.3 Dans le cas de l'expérience 3, déterminer graphiquement la valeur du temps de demi-vie, en faisant apparaître la construction sur la courbe (3).

Données utiles x est proportionnel au nombre N de noyaux radioactifs présents

Comme x est proportionnel à N, la demi-vie est la date à laquelle $x = \dfrac{x_0}{2}$.

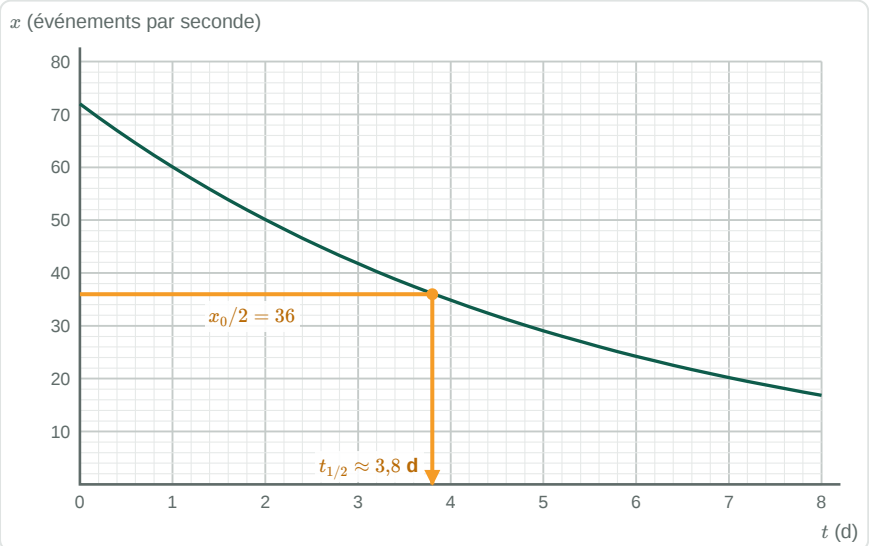
Sur la courbe (3), on lit $x_0 \approx 72$, donc $\dfrac{x_0}{2} \approx 36$.

On trace l'horizontale d'ordonnée 36 jusqu'à la courbe, puis la verticale jusqu'à l'axe des dates : on lit $t \approx 3{,}8$ d.

$t_{1/2} \approx 3{,}8$ d, soit environ 4 jours pour le radon 222.

COMPRENDRE
Une lecture graphique sur une courbe ajustée à des points dispersés ne justifie pas plus de deux chiffres significatifs. Toute valeur comprise entre 3,7 et 4 jours, avec la construction tracée, est acceptable.

MÉTHODE
Lire x_0 sur la courbe modélisée et non sur le premier point de mesure, qui est dispersé. Vérification : à $t = 2\,t_{1/2} \approx 7{,}6$ d, la courbe doit passer par $x_0/4 = 18$, ce qui est bien le cas.



1.3 · Courbe (3) de l'annexe : lecture de la demi-vie du radon 222

1.4 Préciser, en justifiant, si les grandeurs caractéristiques puis les conditions initiales ont une influence sur la valeur du temps de demi-vie.

Données utiles expériences 1 et 2 : $t_{1/2} = 55{,}5$ s ; expérience 3 : $t_{1/2} \approx 3{,}8$ d (1.3)

Conditions initiales : les expériences 1 et 2 portent sur le même noyau (radon 220) avec des populations initiales différentes ($N_0 \neq N_0'$), et la demi-vie reste égale à 55,5 s. Les conditions initiales n'ont pas d'influence.

Grandeurs caractéristiques : entre les expériences 1 (ou 2) et 3, la nature du noyau change et la demi-vie passe de 55,5 s à environ 4 jours. Comme la population initiale ne joue pas, cet écart vient du noyau.

La demi-vie dépend de la nature du noyau, mais pas de la population initiale de noyaux.

MÉTHODE
Pour conclure sur un facteur, comparer deux expériences qui ne diffèrent que par ce facteur. Ici l'expérience 3 change à la fois le noyau et N_0 : il faut donc traiter d'abord les conditions initiales.

2.1 Dans le cas de l'expérience 4, déterminer graphiquement, par une méthode explicitée, la constante de temps du circuit.

Données utiles $U_0 = 4{,}25$ V

Lors de la charge, à la date $t = \tau$, la tension aux bornes du condensateur atteint 63 % de sa valeur finale U_0 :

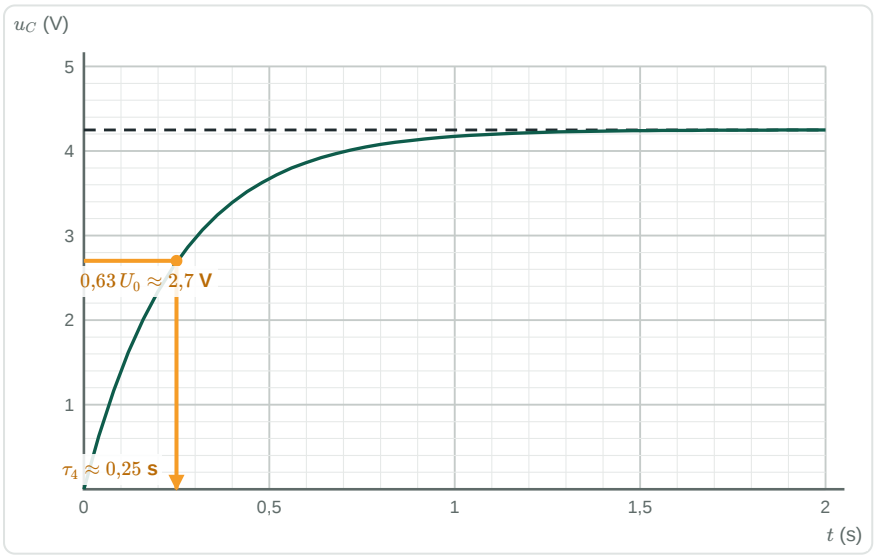
$u_C(\tau) = 0{,}63 \times U_0 = 0{,}63 \times 4{,}25 \approx 2{,}7$ V.

Sur la courbe (4), on trace l'horizontale d'ordonnée 2,7 V jusqu'à la courbe, puis la verticale jusqu'à l'axe des dates.

$\tau_4 \approx 0{,}25$ s

COMPRENDRE
Le facteur 0,63 vient de $u_C(t) = U_0\,(1 - e^{-t/\tau})$: à $t = \tau$, $u_C = U_0\,(1 - e^{-1}) \approx 0{,}63\,U_0$. Sans calculatrice : $0{,}63 \times 4{,}25 \approx 0{,}6 \times 4{,}25 + 0{,}03 \times 4{,}25 \approx 2{,}55 + 0{,}13$.

MÉTHODE
Autre méthode acceptée : la tangente à la courbe à l'origine coupe l'asymptote $u_C = U_0$ à la date $t = \tau$. Elle est moins précise ici, car la tangente est difficile à tracer sur une courbe aussi raide.



2.1 · Début de la courbe (4) de l'annexe : lecture de la constante de temps

2.2 Préciser, en justifiant, si les grandeurs caractéristiques puis les paramètres extérieurs ont une influence sur la valeur de la constante de temps.

Données utiles $\tau_1 = \tau_2 = 0{,}62$ s ; $\tau_3 = 0{,}31$ s ; $\tau_4 \approx 0{,}25$ s (2.1)

Grandeurs caractéristiques (R et C) :

- expériences 1 et 3 : seule R change (20 kΩ puis 10 kΩ) et τ passe de 0,62 s à 0,31 s ;
- expériences 1 et 4 : seule C change (31 µF puis 12,5 µF) et τ passe de 0,62 s à 0,25 s.

Paramètres extérieurs (U_0) : entre les expériences 1 et 2, seule U_0 change (4,25 V puis 5,00 V) et τ reste égale à 0,62 s.

La constante de temps dépend de R et de C, mais pas de la tension U_0 du générateur.

PIÈGE
Comparer les expériences 2 et 3, ou 2 et 4 : deux conditions y changent à la fois (U_0 et R, ou U_0 et C). La justification doit s'appuyer sur des expériences qui ne diffèrent que par une seule grandeur.

2.3.1 À partir de l'étude expérimentale, justifier qu'une seule des six expressions proposées pour τ est à retenir.

Données utiles (1) U_0RC ; (2) $\dfrac{U_0}{RC}$; (3) $\dfrac{R}{C}$; (4) $\dfrac{C}{R}$; (5) RC ; (6) $\sqrt{RC}$

- τ ne dépend pas de U_0 (2.2) : les expressions (1) et (2) sont écartées.
- Expériences 1 et 3 : quand R est divisée par 2, τ est divisée par 2 ($0{,}62/2 = 0{,}31$). τ est proportionnelle à R : on écarte (4), où τ doublerait, et (6), où τ serait divisée par $\sqrt{2}$.
- Expériences 1 et 4 : quand C diminue, τ diminue. On écarte (3), où τ augmenterait.

Seule l'expression (5), $\tau = RC$, est compatible avec les quatre expériences.

COMPRENDRE
Vérification chiffrée : C est divisée par $31/12{,}5 = 2{,}48$ et τ par $0{,}62/0{,}25 = 2{,}48$. τ est donc proportionnelle à C comme à R. De plus $20 \times 10^3 \times 31 \times 10^{-6} = 0{,}62$ s.

2.3.2 Vérifier par une analyse dimensionnelle l'expression de la constante de temps retenue.

Loi d'Ohm, $u = R\,i$: $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$.

Pour le condensateur, $q = C\,u$ et $q = i\,\Delta t$, donc $C = \dfrac{i\,\Delta t}{u}$: $[C] = \dfrac{[I]\,[T]}{[U]}$.

$$[RC] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[I]\,[T]}{[U]} = [T]$$

Le produit RC a la dimension d'un temps : l'expression $\tau = RC$ est homogène.

PIÈGE
Écrire seulement « $\Omega \times \mathrm{F} = \mathrm{s}$ » sans le démontrer : c'est le résultat à établir. Une analyse dimensionnelle ne fixe pas un éventuel coefficient numérique ; c'est l'étude expérimentale qui montre qu'il vaut 1.

MÉTHODE
Ramener chaque grandeur à une tension, une intensité et un temps, à l'aide d'une relation du cours qui la contient. On peut aussi partir de $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, qui donne directement $[C]$.

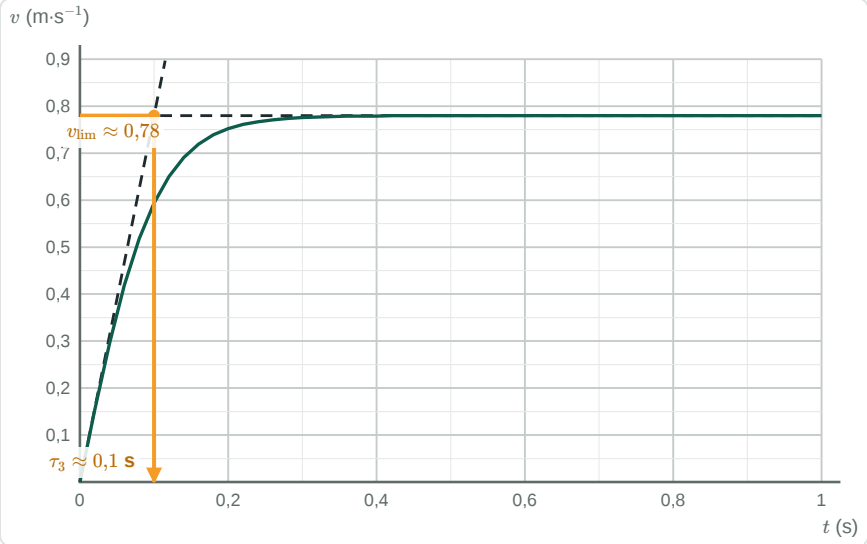
3.1 Dans le cas de l'expérience 3, déterminer graphiquement le temps caractéristique, en faisant apparaître la construction sur la courbe.

Sur la courbe (3), la vitesse tend vers une valeur limite $v_{\text{lim}} \approx 0{,}78\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$: on trace l'asymptote horizontale correspondante.

On trace ensuite la tangente à la courbe à l'origine. Le temps caractéristique est l'abscisse du point où cette tangente coupe l'asymptote.

$\tau_3 \approx 0{,}1$ s

COMPRENDRE
La tangente à l'origine est délicate à tracer : le résultat est une valeur approchée, à un seul chiffre significatif. Une valeur entre 0,08 s et 0,1 s est acceptable si la construction est visible.



3.1 · Courbe (3) de l'annexe : tangente à l'origine et asymptote

3.2 Préciser, en justifiant, si les grandeurs caractéristiques puis les paramètres extérieurs ont une influence sur la valeur du temps caractéristique.

Données utiles $\tau_1 = 0{,}21$ s ; $\tau_2 = 0{,}15$ s ; $\tau_3 \approx 0{,}1$ s (3.1)

Grandeurs caractéristiques : entre les expériences 1 et 3, seule la masse du solide change (même volume, même fluide) et le temps caractéristique passe de 0,21 s à environ 0,1 s.

Paramètres extérieurs : entre les expériences 1 et 2, seul le fluide change (eau puis détergent, même solide A) et le temps caractéristique passe de 0,21 s à 0,15 s.

Le temps caractéristique de la chute dépend de la masse du solide et de la nature du fluide.

PIÈGE
Comparer les expériences 2 et 3 : le solide et le fluide y changent tous les deux, on ne peut rien en conclure. Attention aussi à l'unité de la courbe (2), graduée en $\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

3.3 Préciser sans calcul, en justifiant, la nature du mouvement du centre d'inertie du solide au cours du régime initial, puis au cours du régime asymptotique.

La chute est verticale : la trajectoire du centre d'inertie est une droite, le mouvement est rectiligne.

Régime initial : la courbe $v(t)$ est croissante, la valeur de la vitesse augmente. Le mouvement est rectiligne accéléré.

Régime asymptotique : la courbe $v(t)$ est une droite horizontale, la vitesse garde la valeur constante v_{lim}. Le mouvement est rectiligne uniforme.

Régime initial : mouvement rectiligne accéléré ; régime asymptotique : mouvement rectiligne uniforme.

PIÈGE
Écrire « uniformément accéléré » pour le régime initial. La pente de la courbe, qui représente l'accélération, diminue au cours du temps : l'accélération n'est pas constante.

COMPRENDRE
En régime asymptotique, d'après le principe d'inertie, les forces se compensent : le poids est équilibré par la force de frottement et la poussée d'Archimède exercées par le fluide.

4 Pour l'ensemble des trois systèmes, dire si chaque proposition est juste, fausse, ou si les informations sont insuffisantes : le temps caractéristique dépend (1) des grandeurs caractéristiques, (2) des conditions initiales, (3) des paramètres extérieurs.

Proposition 1 : proposition juste (nature du noyau ; R et C ; masse du solide).

Proposition 2 : proposition fausse (la demi-vie ne dépend pas de la population initiale ; les conditions initiales n'ont pas été modifiées pour les deux autres systèmes).

Proposition 3 : proposition fausse (la constante de temps du circuit RC ne dépend pas de U_0 ; les paramètres extérieurs n'ont pas été modifiés pour la radioactivité).

Proposition 1 : juste ; proposition 2 : fausse ; proposition 3 : fausse.

COMPRENDRE
Un seul système qui contredit la proposition suffit pour qu'elle ne soit pas vérifiée pour les trois à la fois, même si un autre système n'a pas été testé. Les parenthèses ne sont pas exigées : aucune justification n'est demandée.

COMPRENDRE
Lecture différente parfois retenue : répondre « informations insuffisantes » aux propositions 2 et 3, parce qu'un des systèmes n'a pas été testé. La consigne du sujet prête à discussion ; la logique conduit plutôt à « fausse ».