Le condensateur dans tous ses états

Bac S 2003 Polynésie rattrapage (ancien programme) · Exercice 2 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Rappeler la relation permettant de calculer la charge q du condensateur en fonction de I, puis calculer q à la date $t = 3{,}0$ s.

Données utiles $I = 12\ \mu\text{A}$ (constante) ; condensateur déchargé à $t = 0$

L'intensité est le débit de charge : $I = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. Comme I est constante et que $q(0) = 0$:

$$q = I\,t$$

avec q en coulombs, I en ampères et t en secondes.

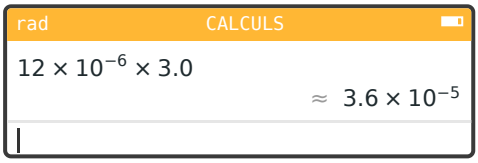
À $t = 3{,}0$ s : $q = 12 \times 10^{-6} \times 3{,}0$

$$\boxed{q = 3{,}6 \times 10^{-5}\ \text{C} = 36\ \mu\text{C}}$$

PIÈGE
L'intensité est en microampères : $12\ \mu\text{A} = 12 \times 10^{-6}$ A. Écrire 12×10^{-3} A donne une charge mille fois trop grande, et fausse ensuite la capacité.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme I et t. La relation $q = I\,t$ n'est valable que parce que le générateur impose un courant constant.

À LA CALCULATRICE



1.2 À partir du graphe n°1 donnant q en fonction de u_{AB}, déterminer la capacité C du condensateur en explicitant la méthode.

Les points du graphe n°1 sont alignés sur une droite passant par l'origine : q est proportionnelle à u_{AB}.

Or $q = C\,u_{AB}$: la capacité C est le coefficient directeur de cette droite.

On trace la droite moyenne et on y lit un point éloigné de l'origine : $u_{AB} = 10$ V pour $q = 47\ \mu\text{C}$.

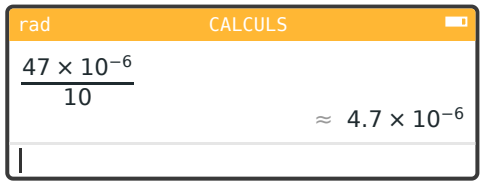
$$C = \frac{\Delta q}{\Delta u_{AB}} = \frac{47 \times 10^{-6} - 0}{10 - 0}$$

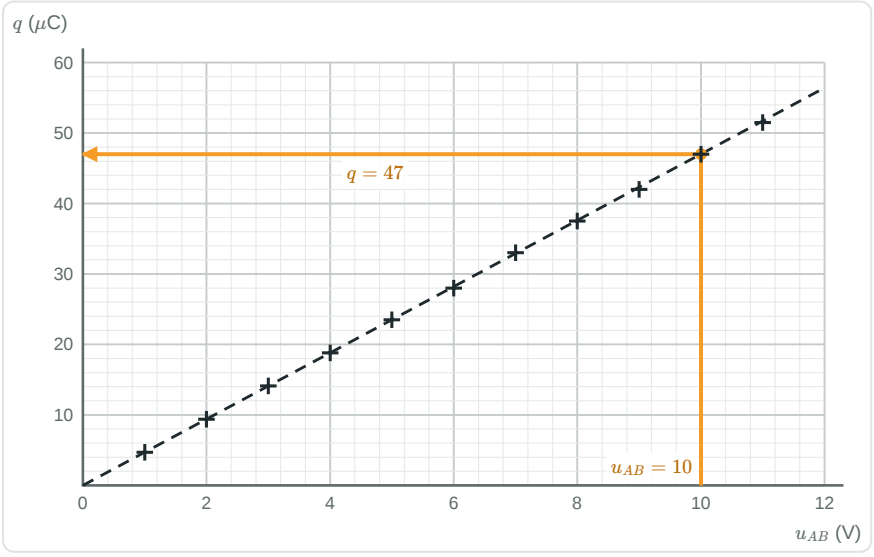
$$\boxed{C = 4{,}7 \times 10^{-6}\ \text{F} = 4{,}7\ \mu\text{F}}$$

COMPRENDRE
La lecture graphique ne garantit pas le deuxième chiffre : toute valeur comprise entre 4,6 et 4,8 μF est recevable.

MÉTHODE
Pour un coefficient directeur, tracer la droite moyenne puis choisir sur elle deux points très écartés : l'erreur de lecture pèse alors moins sur le résultat. Convertir les microcoulombs avant de diviser.

À LA CALCULATRICE





1.2 · Graphe n°1 du sujet, avec la droite moyenne et le point lu

1.3 Le constructeur indique $C = 4{,}7\ \mu\text{F}$ à 10 % près. La valeur obtenue est-elle en accord avec cette tolérance ?

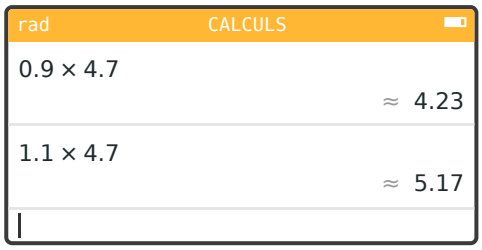
Données utiles $C = 4{,}7\ \mu\text{F}$ (1.2)

Écart toléré : $\dfrac{10}{100} \times 4{,}7 = 0{,}47\ \mu\text{F}$.

La capacité réelle doit donc vérifier : $4{,}7 - 0{,}47 \leqslant C \leqslant 4{,}7 + 0{,}47$, soit $4{,}2\ \mu\text{F} \leqslant C \leqslant 5{,}2\ \mu\text{F}$.

La valeur expérimentale $4{,}7\ \mu\text{F}$ appartient à l'intervalle $[4{,}2\ ;\ 5{,}2]\ \mu\text{F}$: elle est en accord avec la tolérance du constructeur.

À LA CALCULATRICE



2.1 Établir l'équation différentielle $E = RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$ vérifiée par la tension u_C pendant la charge.

Interrupteur en position 1 : le générateur, le conducteur ohmique R et le condensateur sont en série (voir le schéma, u_R et u_C fléchées en convention récepteur).

Loi des mailles : $E = u_R + u_C$.

Loi d'Ohm : $u_R = R\,i$.

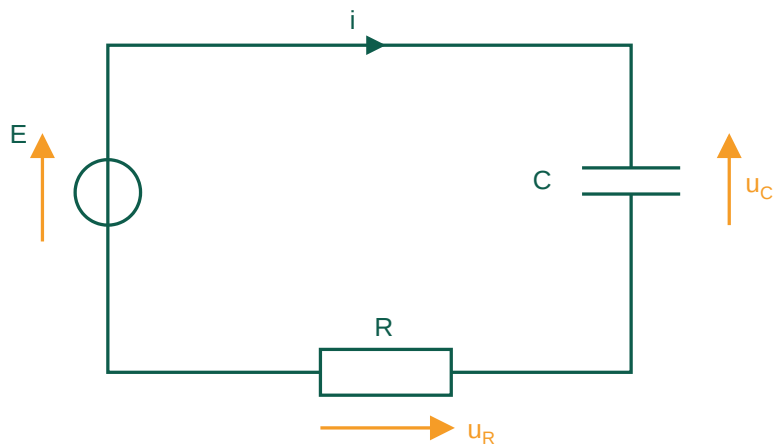
Pour le condensateur : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q = C\,u_C$ avec C constante, donc $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

En remplaçant :

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$$

PIÈGE

Sans schéma fléché, la relation $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ n'est pas justifiée : elle suppose la flèche de u_C opposée au sens de i (convention récepteur). Dans l'autre sens, un signe moins apparaît.



2.1 · Circuit de charge (interrupteur en position 1) avec les tensions fléchées

2.2 En vérifiant que $u_C = A\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\right)$ est solution de l'équation différentielle, identifier A et α en fonction de E, R, C.

$u_C = A - A\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$ donc $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \alpha A\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

On reporte dans l'équation différentielle :

$$E = RC\,\alpha A\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + A - A\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

$$E = A + A\left(RC\,\alpha - 1\right)\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

Cette égalité doit être vraie à chaque instant, alors que $\mathrm{e}^{-\alpha t}$ varie avec t : le terme constant vaut E et le facteur de l'exponentielle est nul.

$A = E$ et $RC\,\alpha - 1 = 0$

$\boxed{A = E \text{ et } \alpha = \dfrac{1}{RC}\text{, soit } u_C = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/RC}\right)}$

PIÈGE
Dériver $-A\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$ donne $+\alpha A\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$: les deux signes moins se compensent. Une erreur de signe ici conduit à α négatif.

MÉTHODE
Vérifier une solution proposée : 1) dériver ; 2) reporter dans l'équation ; 3) regrouper en « constante + facteur × exponentielle » ; 4) annuler le facteur et identifier la constante.

2.3 À partir du graphe n°2, déterminer la valeur de E.

Quand t devient grand, $\mathrm{e}^{-t/RC}$ tend vers 0 et u_C tend vers E : E est l'ordonnée de l'asymptote horizontale.

Sur le graphe n°2, les courbes se stabilisent à 5,0 V.

$\boxed{E = 5{,}0\ \text{V}}$

2.4 a) À l'aide de l'équation différentielle, déterminer la valeur initiale de la dérivée $\left(\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0$. b) Compléter le tableau par la méthode d'Euler avec $\Delta t = 1$ ms.

Données utiles $E = 5{,}0$ V (2.3) ; $R = 2{,}2\ \text{k}\Omega$; $C = 4{,}7\ \mu\text{F}$; $u_C(0) = 0$

a) L'équation différentielle donne, à chaque date : $\left(\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_t = \dfrac{E - u_C(t)}{RC}$.

À $t = 0$, $u_C(0) = 0$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \frac{E}{RC} = \frac{5{,}0}{2{,}2\times10^{3}\times4{,}7\times10^{-6}} = 4{,}8\times10^{2}\ \text{V}\cdot\text{s}^{-1}$$

b) À chaque pas : $u_C(t+\Delta t) = u_C(t) + \left(\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_t \Delta t$, puis nouvelle dérivée $\dfrac{E - u_C}{RC}$, avec $RC = 1{,}034\times10^{-2}$ s.

$u_C(1\ \text{ms}) = 0 + 483{,}6\times1\times10^{-3} = 0{,}4836$ V ; dérivée : $\dfrac{5{,}0 - 0{,}4836}{1{,}034\times10^{-2}} = 436{,}8\ \text{V}\cdot\text{s}^{-1}$

$u_C(2\ \text{ms}) = 0{,}4836 + 0{,}4368 = 0{,}9204$ V ; dérivée : $\dfrac{5{,}0 - 0{,}9204}{1{,}034\times10^{-2}} = 394{,}5\ \text{V}\cdot\text{s}^{-1}$

$u_C(3\ \text{ms}) = 0{,}9204 + 0{,}3945 = 1{,}315$ V ; dérivée : $\dfrac{5{,}0 - 1{,}315}{1{,}034\times10^{-2}} = 356{,}4\ \text{V}\cdot\text{s}^{-1}$

t (ms)	0	1	2	3
$u_C(t)$ (V)	0	0,48	0,92	1,3
$\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ ($\text{V}\cdot\text{s}^{-1}$)	$4{,}8\times10^{2}$	$4{,}4\times10^{2}$	$3{,}9\times10^{2}$	$3{,}6\times10^{2}$

$\boxed{\left(\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0 = 4{,}8\times10^{2}\ \text{V}\cdot\text{s}^{-1}\text{ ; } u_C \text{ vaut 0 ; 0,48 ; 0,92 ; 1,3 V aux dates 0, 1, 2, 3 ms.}}$

PIÈGE
Le pas est donné en millisecondes : $\Delta t = 1\times10^{-3}$ s dans le calcul. Les unités demandées dans le tableau sont le volt et le volt par seconde.

COMPRENDRE
La dérivée diminue à chaque pas : plus u_C approche E, plus la charge ralentit. C'est ce qui courbe le graphe vers son asymptote.

MÉTHODE
Garder les valeurs non arrondies d'une colonne à l'autre et n'arrondir (ici à deux chiffres significatifs, comme les données) que dans le tableau final : les arrondis successifs se cumulent.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$2.2 \times 10^3 \times 4.7 \times 10^{-6} \approx 0.01034$

$\dfrac{5.0}{2.2 \times 10^3 \times 4.7 \times 10^{-6}} \approx 483.559$

$\dfrac{5.0 - 0.4836}{0.01034} \approx 436.7892$

$\dfrac{5.0 - 0.9204}{0.01034} \approx 394.5455$

$\dfrac{5.0 - 1.315}{0.01034} \approx 356.383$

2.5 a) Quelle est l'influence du pas Δt dans la méthode d'Euler ? b) Avantages et inconvénients d'un Δt très grand ou très petit ? c) Que signifie « Δt suffisamment petit dans le cadre de l'expérience » ?

a) La courbe n°2 (pas de 2 ms) est plus proche de la courbe n°3 (solution analytique) que la courbe n°1 (pas de 5 ms). Plus le pas est petit, plus la courbe d'Euler se rapproche de la solution exacte.

b) Pas très grand : peu de points, donc peu de calculs, mais une courbe en segments, nettement écartée de la solution. Pas très petit : résultat précis, mais un très grand nombre de calculs pour couvrir la même durée.

c) La méthode suppose la dérivée constante pendant Δt. Il faut donc que u_C varie peu sur un pas : Δt doit être petit devant la durée caractéristique de la charge, la constante de temps $RC \approx 10$ ms.

Le pas doit être très inférieur à RC ; avec $\Delta t = 1$ ms, soit environ $RC/10$, la condition est acceptable.

COMPRENDRE
« Petit » n'a pas de sens dans l'absolu : 1 ms est court pour ce circuit, mais serait beaucoup trop long pour un circuit dont la constante de temps vaut 1 ms.

2.6 Définir la constante de temps du circuit, déterminer sa valeur sur le graphe n°2 en explicitant la méthode, en déduire une nouvelle valeur expérimentale de C et la comparer à la valeur nominale.

Données utiles $E = 5{,}0$ V (2.3) ; $R = 2{,}2\ \text{k}\Omega$; valeur nominale $C = 4{,}7\ \mu\text{F}$ à 10 % près

La constante de temps est $\tau = RC$: c'est la durée au bout de laquelle la tension atteint 63 % de sa valeur finale, car $u_C(\tau) = E\left(1 - \text{e}^{-1}\right) = 0{,}63\,E$.

$u_C(\tau) = 0{,}63 \times 5{,}0 = 3{,}15$ V. On trace l'horizontale d'ordonnée 3,15 V jusqu'à la courbe n°3, puis on lit l'abscisse du point d'intersection : $\tau \approx 0{,}010$ s.

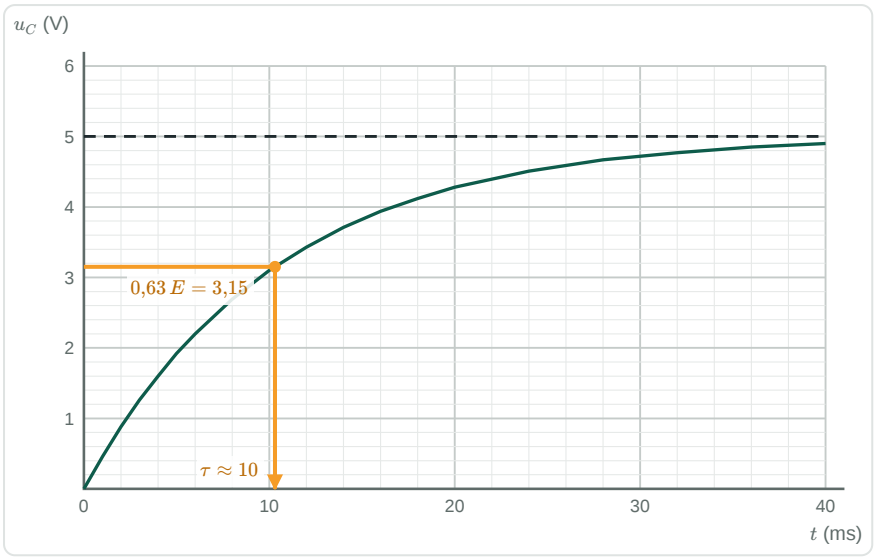
$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{0{,}010}{2{,}2 \times 10^3} = 4{,}5 \times 10^{-6}\ \text{F}$$

Cette valeur se trouve dans l'intervalle $[4{,}2\ ;\ 5{,}2]\ \mu\text{F}$ de la question 1.3.

$\tau \approx 10$ ms et $C \approx 4{,}5\ \mu\text{F}$, compatible avec la valeur nominale $4{,}7\ \mu\text{F}$ à 10 % près.

PIÈGE
Lire τ sur la courbe n°3 (solution analytique), pas sur les courbes d'Euler n°1 ou n°2, qui sont approchées et donneraient une valeur trop faible.

COMPRENDRE
Le quadrillage ne permet de lire τ qu'à 1 ms près : entre 10 et 11 ms, on trouve C entre 4,5 et $5{,}0\ \mu\text{F}$, toujours dans la tolérance.



2.6 · Courbe n°3 du graphe n°2, avec la lecture de la constante de temps

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

0.63×5.0

≈ 3.15

$\frac{0.010}{2.2 \times 10^3}$

$\approx 4.545455 \times 10^{-6}$

2.7 On bascule l'inverseur en position 2. Vrai ou faux, en justifiant : a) la décharge du condensateur dure plus longtemps que la charge ; b) la constante de temps lors de la décharge est égale à $(R + R')\,C$.

Données utiles $R = 2{,}2\ \text{k}\Omega$; $R' = 10\ \text{k}\Omega$; $C = 4{,}7\ \mu\text{F}$

En position 2, le condensateur est relié au seul conducteur ohmique R' : la branche contenant le générateur et R est ouverte, aucun courant n'y circule.

b) La constante de temps de la décharge est donc $\tau' = R'C$, et non $(R + R')\,C$: affirmation **fausse**.

a) $\tau' = R'C = 10 \times 10^3 \times 4{,}7 \times 10^{-6} = 4{,}7 \times 10^{-2}$ s, à comparer à $\tau = RC = 1{,}0 \times 10^{-2}$ s pour la charge.

Charge et décharge sont pratiquement terminées au bout de cinq constantes de temps. Comme $R' > R$, on a $\tau' > \tau$: la décharge est plus longue. Affirmation **vraie**.

a) Vrai : $\tau' = 47\ \text{ms} > \tau = 10\ \text{ms}$. b) Faux : $\tau' = R'C$.

MÉTHODE

Avant de donner une constante de temps, redessiner la maille réellement parcourue par le courant : seule la résistance de cette maille intervient dans τ.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$10 \times 10^3 \times 4.7 \times 10^{-6}$

≈ 0.047