Le grand saut: une chute libre?

Bac S 2003 Amérique du Sud (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1.1 Au sens des physiciens, quand dit-on qu'une chute est libre ?

Une chute est libre lorsque le système n'est soumis qu'à une seule force : son poids.

COMPRENDRE
Cela exclut tout frottement de l'air et la poussée d'Archimède. Une chute libre n'est pas forcément verticale : avec une vitesse initiale horizontale, la trajectoire est courbe.

1.1.2 Appliquer la deuxième loi de Newton et en déduire les coordonnées a_x et a_z du vecteur accélération du sauteur.

Système {sauteur}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical et dirigé vers le bas, alors que l'axe Oz est dirigé vers le haut :

$a_x = 0$ et $a_z = -g$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » : g désigne une valeur positive ($9{,}80\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$), mais l'axe Oz est orienté vers le haut.

1.2 Exprimer, dans le repère défini, les coordonnées v_{0x} et v_{0z} du vecteur vitesse initiale du sauteur.

À l'instant initial, le sauteur a la vitesse de l'avion, qui vole en palier horizontal : $\vec{v}_0$ est horizontal, dans le sens de Ox.

$v_{0x} = v_0$ et $v_{0z} = 0$

COMPRENDRE
Aucun calcul de primitive ici : la vitesse initiale est une donnée de l'énoncé, qu'il suffit de projeter sur les deux axes.

1.3.1 Déduire des résultats précédents les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement du sauteur.

Données utiles $a_x = 0$, $a_z = -g$ (1.1.2) ; $v_{0x} = v_0$, $v_{0z} = 0$ (1.2) ; à $t = 0$: $x_A = 0$, $z_A = h_0$

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de a_x et a_z ; les constantes sont les coordonnées de $\vec{v}_0$:

$$v_x(t) = v_0 \qquad v_z(t) = -g\,t$$

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, on cherche de nouveau les primitives ; les constantes sont les coordonnées du point A :

$x(t) = v_0\,t$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + h_0$

PIÈGE
Oublier la constante h_0 dans $z(t)$: l'origine du repère est au sol, pas au point A.

MÉTHODE
Deux primitives successives, coordonnée par coordonnée. Chaque constante se détermine avec les conditions initiales : vitesse à $t = 0$, puis position à $t = 0$.

1.3.2 Quelle est l'équation de la trajectoire $z = f(x)$ du sauteur ? Comment nomme-t-on une telle portion de courbe ?

On élimine le temps : $x = v_0\,t$ donne $t = \dfrac{x}{v_0}$, que l'on reporte dans $z(t)$.

$z = -\dfrac{g}{2\,v_0^2}\,x^2 + h_0$: la trajectoire est un arc de parabole.

COMPRENDRE
z est une fonction du second degré de x, d'où la parabole. Le coefficient de x^2 est négatif : la courbe descend à partir de son sommet, le point A.

1.3.3 Au bout de quelle durée le sauteur atteindra-t-il l'altitude h_1 ?

Données utiles $h_0 = 3{,}0 \times 10^3$ m ; $h_1 = 1{,}0 \times 10^3$ m ; $g = 9{,}80\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

On cherche la date t_1 telle que $z(t_1) = h_1$:

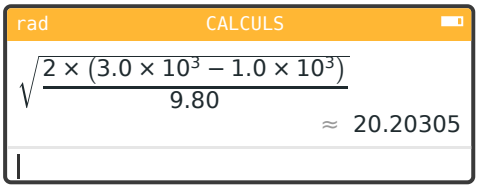
$$-\frac{1}{2} g\, t_1^2 + h_0 = h_1 \quad \text{soit} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2\,(h_0 - h_1)}{g}}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \times (3{,}0 \times 10^3 - 1{,}0 \times 10^3)}{9{,}80}}$$

$$\boxed{t_1 = 20\ \text{s}}$$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme h_0 et h_1, les données les moins précises. Cette durée ne dépend pas de v_0 : le mouvement vertical est indépendant du mouvement horizontal.

À LA CALCULATRICE



2.1.1 Si la chute est libre, justifier sans calcul que l'énergie mécanique du sauteur se conserve entre l'altitude h_0 et l'altitude h_1.

En chute libre, le sauteur n'est soumis qu'à son poids, qui est une force conservative. Aucune force non conservative (frottement) ne travaille.

L'énergie mécanique $E_m = E_c + E_{pp}$ se conserve : l'énergie potentielle de pesanteur perdue est intégralement convertie en énergie cinétique.

MÉTHODE
Pour justifier une conservation de E_m : faire le bilan des forces, puis vérifier que seules des forces conservatives travaillent.

2.1.2 En déduire la valeur v_1 de la vitesse atteinte dans ce cas par le sauteur à l'altitude h_1.

Données utiles $v_0 = 130\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$; $h_0 = 3{,}0 \times 10^3$ m ; $h_1 = 1{,}0 \times 10^3$ m ; $g = 9{,}80\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Conservation de l'énergie mécanique entre A (altitude h_0) et le point d'altitude h_1 :

$$\frac{1}{2} m\, v_0^2 + m\, g\, h_0 = \frac{1}{2} m\, v_1^2 + m\, g\, h_1$$

d'où $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2\, g\, (h_0 - h_1)}$.

Conversion : $v_0 = \dfrac{130}{3{,}6} = 36{,}1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

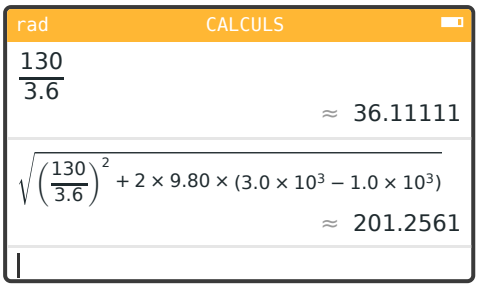
$$v_1 = \sqrt{\left(\frac{130}{3{,}6}\right)^2 + 2 \times 9{,}80 \times (3{,}0 \times 10^3 - 1{,}0 \times 10^3)}$$

$$\boxed{v_1 = 2{,}0 \times 10^2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

PIÈGE
Laisser v_0 en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, ou oublier le terme v_0^2 : le sauteur possède déjà une énergie cinétique en quittant l'avion.

COMPRENDRE
La masse se simplifie : en chute libre, la vitesse atteinte ne dépend pas de la masse du sauteur. Ici $v_1 \approx 720\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

À LA CALCULATRICE



2.2 En réalité, la vitesse du sauteur se stabilise à $v_1' = 55\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Comment expliquer cet écart ? La chute est-elle réellement libre ?

Données utiles $v_1 = 2{,}0 \times 10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (2.1.2)

La vitesse réelle est près de quatre fois plus faible que v_1. Le modèle a négligé la force de frottement exercée par l'air, qui s'oppose au mouvement et dissipe une partie de l'énergie mécanique.

Cette force augmente avec la vitesse : quand elle compense le poids, la somme des forces est nulle et la vitesse reste constante (vitesse limite).

Le sauteur est soumis à son poids et aux frottements de l'air : la chute n'est pas libre au sens des physiciens.

COMPRENDRE
Vitesse constante en ligne droite signifie forces qui se compensent (principe d'inertie), et non absence de forces.

3.1 Quelle est l'unité de K ?

Données utiles $F = \frac{1}{2} K \rho v^2$; $1\ \text{N} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; ρ en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

On isole $K = \dfrac{2F}{\rho v^2}$; le facteur 2 est sans unité.

$$\text{unité de } K = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}\times\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}} = \text{m}^2$$

K s'exprime en m^2 : $K = 38\ \text{m}^2$.

COMPRENDRE
K est homogène à une surface, ce qui est cohérent avec l'énoncé : il dépend de la surface du parachute.

MÉTHODE
Isoler la grandeur cherchée, remplacer chaque grandeur par son unité de base du Système international, puis simplifier comme dans un calcul littéral.

3.2 En utilisant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle du mouvement est $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{K\,\rho\,v^2}{2\,m} = g$.

Système {sauteur + parachute}, de masse m ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Forces : le poids $\vec{P}$, vertical vers le bas, de valeur $m\,g$; le frottement $\vec{F}$, vertical vers le haut (opposé à la vitesse), de valeur $\dfrac{1}{2}\,K\,\rho\,v^2$. La poussée d'Archimède est négligée.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{a}$.

Le mouvement est vertical vers le bas : on projette sur un axe vertical orienté vers le bas, sur lequel la coordonnée de la vitesse est égale à sa valeur v :

$$m\,g - \frac{1}{2}\,K\,\rho\,v^2 = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

En divisant par m :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{K\,\rho\,v^2}{2\,m} = g}$$

PIÈGE
Projeter sur Oz orienté vers le haut donne $v_z = -v$, donc $\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Sans ce changement de signe, on n'obtient pas l'équation demandée.

MÉTHODE
Pour un mouvement rectiligne, orienter l'axe dans le sens du mouvement : la coordonnée de la vitesse se confond alors avec sa valeur v.

3.3 La vitesse se stabilise à une valeur v_2. À partir de l'équation différentielle, déduire l'expression de v_2, puis calculer sa valeur.

Données utiles $m = 90\ \mathrm{kg}$; $g = 9{,}80\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $K = 38\ \mathrm{m^2}$ (3.1) ; $\rho = 1{,}3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

Quand la vitesse est stabilisée, $v = v_2$ est constante, donc $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$.

L'équation différentielle devient :

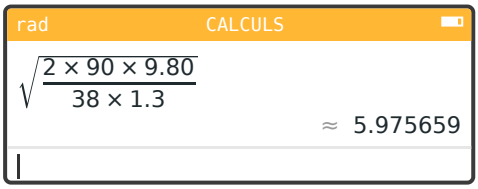
$$\frac{K\,\rho\,v_2^2}{2\,m} = g \quad \text{soit} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2\,m\,g}{K\,\rho}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \times 90 \times 9{,}80}{38 \times 1{,}3}}$$

$$\boxed{v_2 = 6{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

COMPRENDRE
Cette relation traduit $F = P$: à la vitesse limite, le frottement compense exactement le poids. $6{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, soit environ $22\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$, permet un atterrissage sans danger.

À LA CALCULATRICE



3.4 Retrouver, à l'aide de la courbe de la figure 2 donnant l'altitude z en fonction du temps, la valeur limite v_2 calculée au 3.3.

Données utiles $v_2 = 6{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (3.3)

La courbe est une droite : l'altitude diminue régulièrement, la vitesse est donc constante. Sa coordonnée verticale $v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ est le coefficient directeur de la droite.

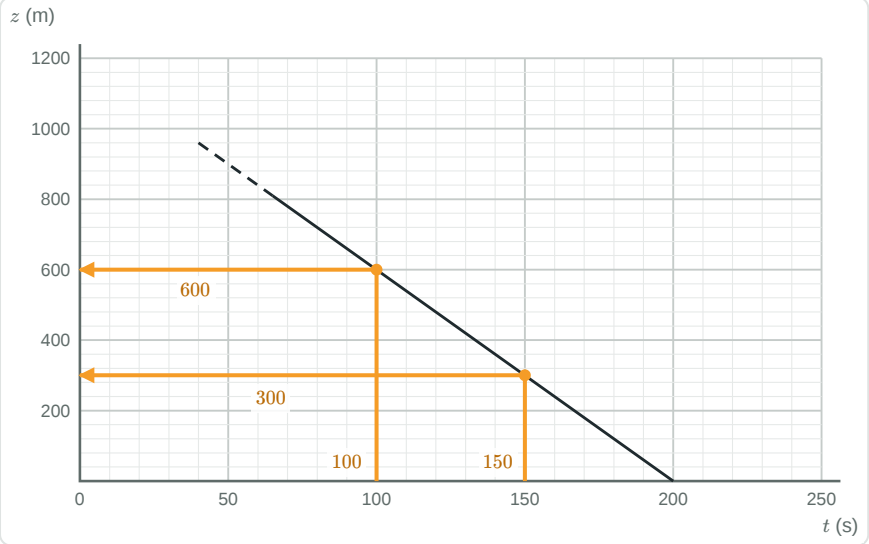
On lit deux points éloignés sur la droite : $(100\ \text{s}\ ;\ 600\ \text{m})$ et $(150\ \text{s}\ ;\ 300\ \text{m})$.

$$v_z = \frac{300 - 600}{150 - 100} = -6{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Le signe « $-$ » indique que le sauteur descend ; la valeur de la vitesse est $v_2 = |v_z|$.

$v_2 = 6{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$: on retrouve la valeur calculée au 3.3.

PIÈGE
Annoncer une vitesse négative : v_2 est une valeur, donc positive. Seule la coordonnée v_z est négative, car Oz est orienté vers le haut.



3.4 · Figure 2 du sujet, avec les deux points lus sur la droite

À LA CALCULATRICE

