Charge d'un condensateur à l'aide d'une pile

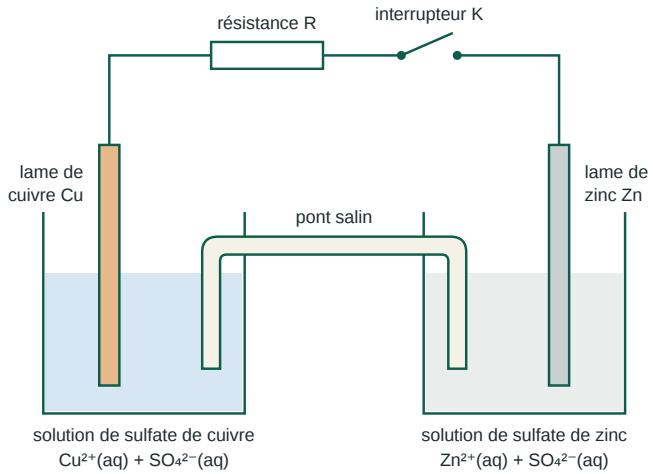
Bac S 2003 Métropole (ancien programme) · Exercice 1 **7 points** **Durée conseillée 1 h 31**

1.1 Faire un schéma légendé de la pile, complété par la résistance et l'interrupteur.

Chaque lame plonge dans la solution contenant ses propres ions : le cuivre dans le sulfate de cuivre, le zinc dans le sulfate de zinc. Le pont salin relie les deux solutions ; la résistance et l'interrupteur sont branchés en série entre les deux lames.

Schéma ci-contre : deux demi-piles reliées par un pont salin, circuit extérieur avec R et K en série.

PIÈGE
Oublier le pont salin, ou plonger les deux lames dans le même bécher. Sans pont salin, le circuit est ouvert et aucun courant ne circule.



1.1 · Pile cuivre-zinc branchée sur la résistance et l'interrupteur

1.2 Déterminer le quotient de réaction $Q_{r,i}$ à la date t_0, puis en déduire le sens d'évolution spontanée du système.

Données utiles $C_1 = 1{,}0\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$; $C_2 = 1{,}0\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$; $K = 4{,}6\times10^{36}$

Pour l'équation $\text{Cu}^{2+}(\text{aq}) + \text{Zn}(\text{s}) = \text{Zn}^{2+}(\text{aq}) + \text{Cu}(\text{s})$, les solides n'apparaissent pas dans le quotient :

$$Q_{r,i} = \frac{[\text{Zn}^{2+}]_i}{[\text{Cu}^{2+}]_i} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{1{,}0}{1{,}0} = 1{,}0$$

$Q_{r,i} < K$: le système évolue spontanément dans le sens direct de l'équation.

$Q_{r,i} = 1{,}0 < K$: sens direct, les ions Cu^{2+} et le zinc sont consommés.

PIÈGE
Inverser le quotient : les produits de l'équation telle qu'elle est écrite vont au numérateur. Ici c'est Zn^{2+} en haut, Cu^{2+} en bas.

COMPRENDRE
Le quotient de réaction est sans unité : chaque concentration est en réalité divisée par $c^\circ = 1\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$. Avec K de l'ordre de 10^{36}, la transformation est quasi totale.

1.3 Pour chaque électrode, écrire la demi-équation correspondant au couple qui intervient.

Dans le sens direct, Cu^{2+} est réduit et Zn est oxydé.

Électrode de cuivre, couple Cu^{2+}/Cu : $\text{Cu}^{2+}(\text{aq}) + 2\,\text{e}^- = \text{Cu}(\text{s})$ (réduction).

Électrode de zinc, couple Zn^{2+}/Zn : $\text{Zn}(\text{s}) = \text{Zn}^{2+}(\text{aq}) + 2\,\text{e}^-$ (oxydation).

$\text{Cu}^{2+}(\text{aq}) + 2\,\text{e}^- = \text{Cu}(\text{s})$ et $\text{Zn}(\text{s}) = \text{Zn}^{2+}(\text{aq}) + 2\,\text{e}^-$

MÉTHODE
Écrire chaque demi-équation dans le sens où elle se déroule réellement, d'après le sens d'évolution trouvé. On repère alors d'un coup d'œil l'électrode qui libère les électrons.

1.4 En déduire, en justifiant, quel métal constitue le pôle + de la pile et quel métal constitue le pôle –.

À l'électrode de zinc, l'oxydation libère des électrons, qui partent dans le circuit extérieur : le zinc est le pôle –.

À l'électrode de cuivre, la réduction consomme les électrons qui arrivent par le circuit extérieur : le cuivre est le pôle +.

Pôle + : cuivre ; pôle – : zinc.

COMPRENDRE
Dans le circuit extérieur, les électrons vont du zinc vers le cuivre ; le courant circule en sens inverse, du pôle + (cuivre) vers le pôle – (zinc).

1.5 Calculer la quantité maximale d'électricité que la pile pourrait théoriquement débiter.

Données utiles $C_2 = 1{,}0\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$; $V_2 = 100\ \text{mL}$; $N_A = 6{,}02\times10^{23}\ \text{mol}^{-1}$; $e = 1{,}6\times10^{-19}$ C

Les ions Zn^{2+} sont formés par la réaction : le réactif limitant est l'ion Cu^{2+} (la lame de zinc est supposée en excès).

$n(Cu^{2+})_i = C_2\,V_2 = 1{,}0\times0{,}100 = 0{,}10$ mol.

D'après $Cu^{2+}\,(aq) + 2\,e^- = Cu\,(s)$, chaque ion consommé correspond à deux électrons échangés : $n(e^-) = 2\,C_2\,V_2$.

Chaque mole d'électrons porte la charge $N_A\,e$:

$$Q_{max} = n(e^-)\,N_A\,e = 2\,C_2\,V_2\,N_A\,e$$

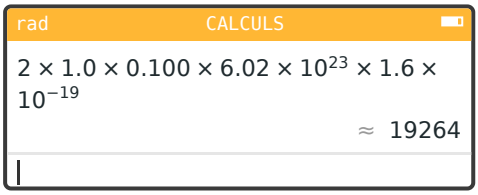
$$Q_{max} = 2\times1{,}0\times0{,}100\times6{,}02\times10^{23}\times1{,}6\times10^{-19}$$

$Q_{max} = 1{,}9\times10^{4}$ C

PIÈGE
Oublier le facteur 2 (deux électrons par ion cuivre) ou laisser V_2 en mL. L'énoncé cite Zn^{2+} comme réactif limitant possible, mais c'est un produit : il ne peut pas s'épuiser.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme C_2 et e, les données les moins précises. Le produit $N_A\,e \approx 9{,}6\times10^{4}\ \text{C}\cdot\text{mol}^{-1}$ est la constante de Faraday.

À LA CALCULATRICE



2.1 À la date $t_1 = 20$ s, le condensateur est complètement chargé. Quelle est l'intensité du courant dans le circuit ? Donner la valeur de E à partir de l'enregistrement.

Condensateur chargé : u_C ne varie plus, la charge des armatures non plus, donc aucun courant ne circule : $i = 0$ A.

La pile ne débite plus : la tension à ses bornes vaut E. Elle est égale à u_C (loi des mailles) : E est l'ordonnée du palier de la courbe.

Lecture sur la figure 3 : le palier se situe un peu au-dessus de 1 V.

$i = 0$ A et $E = u_C(20\ \text{s}) \approx 1{,}06$ V

COMPRENDRE
En régime permanent, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. La tension aux bornes de la pile, $E - r\,i$, se réduit alors à E.

2.2.1 Donner l'expression littérale de la constante de temps τ et justifier qu'elle a la dimension d'une durée.

La seule résistance du circuit est la résistance interne de la pile : $\tau = r\,C$.

Loi d'Ohm, $u = r\,i$: r s'exprime en $\text{V}\cdot\text{A}^{-1}$.

Condensateur, $i = C\,\dfrac{\text{d}u_C}{\text{d}t}$: C s'exprime en $\text{A}\cdot\text{s}\cdot\text{V}^{-1}$.

Le produit $r\,C$ s'exprime donc en $\text{V}\cdot\text{A}^{-1}\times\text{A}\cdot\text{s}\cdot\text{V}^{-1} = \text{s}$.

$\tau = r\,C$, homogène à une durée (en secondes).

MÉTHODE
Pour une analyse dimensionnelle, partir de relations simples contenant la grandeur ($u = r\,i$, $q = C\,u$, $q = i\,\Delta t$), puis simplifier les unités comme des facteurs.

2.2.2 Déterminer graphiquement la valeur de τ, par une méthode qui apparaît sur la figure 3.

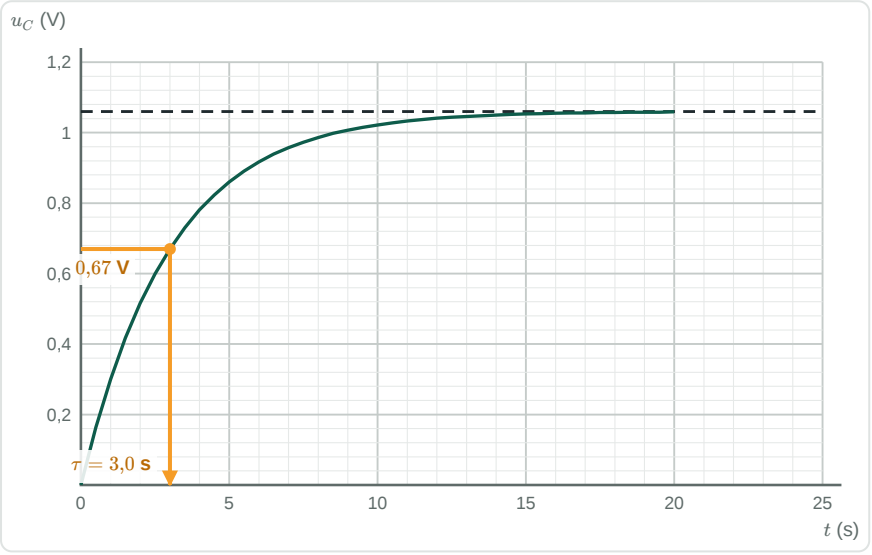
Données utiles $E = 1{,}06$ V (2.1)

À la date $t = \tau$: $u_C(\tau) = E\,(1 - e^{-1}) = 0{,}63\,E$.

$0{,}63 \times 1{,}06 = 0{,}67$ V.

On trace l'horizontale d'ordonnée $0{,}67$ V jusqu'à la courbe, puis on lit l'abscisse du point d'intersection.

$\tau \approx 3{,}0$ s



2.2.2 · Figure 3 complétée : lecture de τ à $0{,}63\,E$

PIÈGE
Prendre 63 % de 1 V au lieu de 63 % de E, ou lire τ là où la courbe atteint le palier : cette date vaut environ $5\,\tau$.

MÉTHODE
Autre méthode : la tangente à l'origine coupe l'asymptote $u_C = E$ à la date τ. La lecture à 63 % est plus fiable, car le tracé d'une tangente reste imprécis.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS
0.63×1.06
≈ 0.6678

2.2.3 En déduire la valeur de la résistance interne r de la pile.

Données utiles $\tau = 3{,}0$ s (2.2.2) ; $C = 330\ \mu$F

$\tau = r\,C$ donc $r = \dfrac{\tau}{C}$.

$$r = \frac{3{,}0}{330 \times 10^{-6}} = 9{,}1 \times 10^{3}\ \Omega$$

$r = 9{,}1 \times 10^{3}\ \Omega$, soit $9{,}1\ \text{k}\Omega$

PIÈGE
Laisser la capacité en microfarads : $330\ \mu\text{F} = 330 \times 10^{-6}$ F. Sans conversion, on trouve une résistance un million de fois trop petite.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS
$\dfrac{3.0}{330 \times 10^{-6}}$
≈ 9090.909

2.3.1 En respectant l'orientation du schéma 2, donner la relation entre l'intensité i et la charge q portée par l'armature A.

Le sens positif choisi pour i arrive sur l'armature A : quand $i > 0$, la charge q de cette armature augmente.

$i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$

PIÈGE
Le signe dépend de l'orientation. Si le courant positif quittait l'armature qui porte q, il faudrait écrire $i = -\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

2.3.2 Donner la relation entre la charge q et la tension u_C aux bornes du condensateur.

La flèche de u_C pointe vers l'armature A, qui porte q : $u_C = u_{AB}$.

$$q = C\,u_C$$

2.3.3 Montrer qu'à partir de la date t_0, la tension u_C vérifie l'équation différentielle $E = u_C + r\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

Interrupteur fermé, loi des mailles : $u_{PN} = u_{AB} = u_C$.

Pile modélisée par E en série avec r : $u_{PN} = E - r\,i$.

Donc $E - r\,i = u_C$, soit $E = u_C + r\,i$.

Or $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q = C\,u_C$ avec C constante : $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

$E = u_C + r\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$: c'est bien l'équation attendue.

MÉTHODE

Toujours le même enchaînement pour un circuit RC : loi des mailles, loi d'Ohm, $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, $q = C\,u_C$, puis tout exprimer en fonction de u_C.

2.3.4 La solution est de la forme $u_C(t) = E\,(1 - e^{-\alpha t})$. En déduire l'expression littérale de α.

On dérive : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \alpha\,E\,e^{-\alpha t}$.

On reporte dans l'équation différentielle :

$$E = E\,(1 - e^{-\alpha t}) + r\,C\,\alpha\,E\,e^{-\alpha t}$$

$$0 = E\,e^{-\alpha t}\,(r\,C\,\alpha - 1)$$

Cette égalité doit être vraie à chaque instant, et $E\,e^{-\alpha t}$ n'est jamais nul : $r\,C\,\alpha - 1 = 0$.

$$\alpha = \frac{1}{r\,C} = \frac{1}{\tau}$$

COMPRENDRE

α est l'inverse de la constante de temps : ici $\alpha \approx 0{,}33\ \mathrm{s}^{-1}$. On retrouve $u_C(0) = 0$ et $u_C \to E$ quand t devient grand, comme sur la figure 3.