Principe de fonctionnement d'un bac à décantation à flux horizontal

Bac S 2004 Polynésie (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Par une analyse dimensionnelle, vérifier que l'unité du coefficient de frottement f est bien le $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

La force de frottement a pour valeur $F = f\,v$, donc $f = \dfrac{F}{v}$.

Une force est le produit d'une masse par une accélération : $[F] = M\cdot L\cdot T^{-2}$. Une vitesse : $[v] = L\cdot T^{-1}$.

$$[f] = \frac{M\cdot L\cdot T^{-2}}{L\cdot T^{-1}} = M\cdot T^{-1}$$

f est une masse divisée par un temps : son unité est bien le $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

MÉTHODE
Pour la dimension d'une force, partir d'une relation connue : $P = m\,g$ ou $F = m\,a$. Le newton vaut ainsi $1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

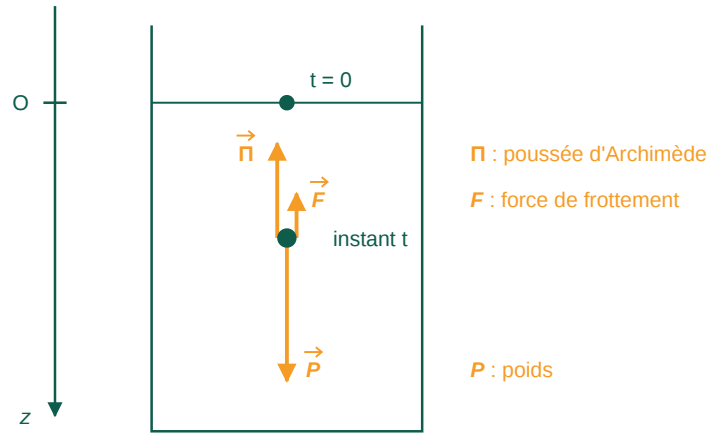
1.2 Compléter l'annexe 1 en représentant les forces qui s'exercent sur la particule à l'instant t de sa chute.

Trois forces verticales s'appliquent à la particule :

- le poids $\vec{P}$, vers le bas ;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$, vers le haut ;
- la force de frottement $\vec{F}$, opposée à la vitesse, donc vers le haut.

Voir l'annexe 1 complétée : $\vec{P}$ vers le bas, $\vec{\Pi}$ et $\vec{F}$ vers le haut, avec $\Pi + F \leqslant P$.

PIÈGE
Dessiner $\vec{\Pi}$ plus longue que $\vec{P}$: la particule remonterait. Ici $\rho_l < \rho_S$, donc $\Pi < P$, et tant que la vitesse augmente, $\Pi + F < P$.



1.2 · Annexe 1 complétée : les trois forces à l'instant t

1.3 En appliquant la deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de la particule.

Système {particule} de masse m ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F} = m\,\vec{a}$.

Projection sur l'axe Oz dirigé vers le bas, avec $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$:

$$m\,g - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_l\, g - f\,v = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Le volume de la sphère est $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{m}{\rho_S}$, donc $\Pi = \dfrac{\rho_l}{\rho_S}\,m\,g$. En divisant par m :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{f}{m}\,v = g\left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_S}\right)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{f}{m}\,v = g\left(\frac{\rho_S - \rho_l}{\rho_S}\right)}$$

PIÈGE
Les signes de la projection : l'axe est orienté vers le bas, le poids compte donc positivement, la poussée d'Archimède et le frottement négativement.

COMPRENDRE
La poussée d'Archimède est le poids du liquide déplacé : même volume V que la particule, mais masse volumique ρ_l. D'où le rapport ρ_l/ρ_S avec le poids.

1.4 En déduire l'expression de la vitesse limite v_l atteinte par les particules, puis calculer v_l.

Données utiles $\rho_l = 1{,}0 \times 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$; $\rho_S = 1{,}5 \times 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$; $m = 5{,}0 \times 10^{-14}$ kg ; $f = 3{,}1 \times 10^{-12}\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$; $g = 9{,}8\ \mathrm{N\cdot kg^{-1}}$

Quand la vitesse limite est atteinte, $v = v_l$ est constante : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$.

L'équation différentielle devient

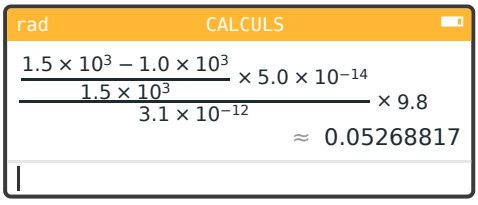
$$\frac{f}{m}\,v_l = g\left(\frac{\rho_S - \rho_l}{\rho_S}\right) \quad \text{soit} \quad v_l = \frac{\rho_S - \rho_l}{\rho_S}\cdot\frac{m}{f}\cdot g$$

$$v_l = \frac{1{,}5\times10^3 - 1{,}0\times10^3}{1{,}5\times10^3} \times \frac{5{,}0\times10^{-14}}{3{,}1\times10^{-12}} \times 9{,}8$$

$$\boxed{v_l = 5{,}3\times10^{-2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

COMPRENDRE
Toutes les données ont deux chiffres significatifs : le résultat en garde deux. Cette valeur, environ 5 cm par seconde, s'accorde avec le palier du graphe de la question 1.6.

À LA CALCULATRICE



1.5 À partir de la solution $v(t) = v_l\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{f}{m}t}\right)$, déterminer la date t_1 à partir de laquelle la vitesse vaut 99 % de la vitesse limite.

Données utiles $m = 5{,}0 \times 10^{-14}$ kg ; $f = 3{,}1 \times 10^{-12}\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$

On cherche t_1 tel que $v(t_1) = 0{,}99\,v_l$:

$$v_l\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{f}{m}t_1}\right) = 0{,}99\,v_l \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{-\frac{f}{m}t_1} = 0{,}01$$

$$-\frac{f}{m}\,t_1 = \ln(0{,}01) \quad\Longrightarrow\quad t_1 = -\frac{m}{f}\ln(0{,}01) = -\frac{5{,}0\times10^{-14}}{3{,}1\times10^{-12}} \times \ln(0{,}01)$$

$$\boxed{t_1 = 7{,}4\times10^{-2}\ \mathrm{s}\text{, soit } 74\ \mathrm{ms}}$$

COMPRENDRE
Comme $\ln(0{,}01) = -4{,}6$, on trouve $t_1 = 4{,}6\,\dfrac{m}{f}$: c'est l'origine de la règle « régime permanent atteint au bout d'environ 5 fois le temps caractéristique ».

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{-5.0 \times 10^{-14}}{3.1 \times 10^{-12}} \times \ln(0.01) \approx 0.07427694$$

1.6 a) Déterminer, par la méthode de son choix, le temps caractéristique τ_1 de l'évolution de la vitesse. b) Décrire et nommer les phases du mouvement entre $t = 0$ et $t' = 100$ ms.

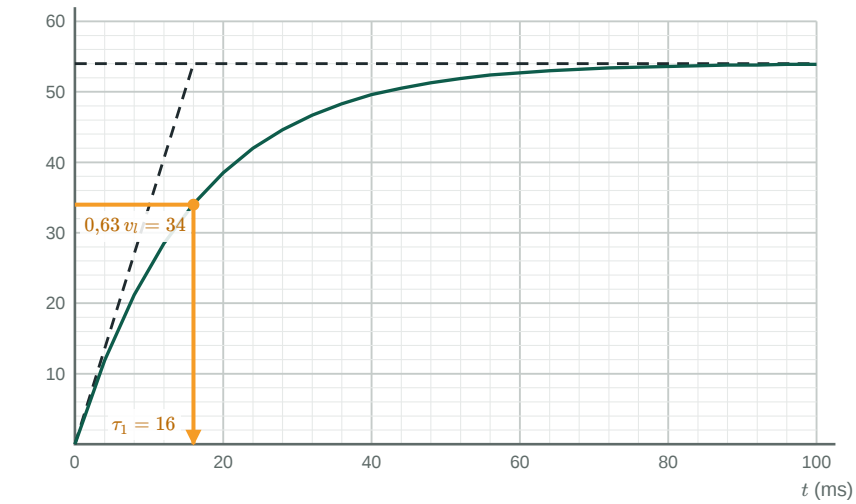
Données utiles graphe $v(t)$ du sujet ; palier lu : $v_l \approx 54 \times 10^{-3}$ m · s^{-1}

a) À la date $t = \tau_1$, la vitesse vaut 63 % de la vitesse limite : $0{,}63 \times 54 = 34$ (en 10^{-3} m · s^{-1}). Sur le graphe, cette valeur est atteinte à la date 16 ms. La tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale à la même abscisse.

$\tau_1 \approx 16$ ms

b) De $t = 0$ à environ 80 ms ($5\,\tau_1$) : **régime transitoire**. La vitesse augmente, de moins en moins vite ; le mouvement est rectiligne accéléré.

Au-delà et jusqu'à 100 ms : **régime permanent**. La vitesse garde la valeur v_l ; le mouvement est rectiligne uniforme.



1.6 · Graphe du sujet : tangente à l'origine, asymptote et lecture à 63 % de la vitesse limite

PIÈGE
Oublier le facteur de l'axe vertical : les graduations sont en millièmes de mètre par seconde, le palier vaut donc $5{,}4 \times 10^{-2}$ m · s^{-1}.

COMPRENDRE
Contrôle par le calcul : $\tau_1 = \frac{m}{f} = \frac{5{,}0 \times 10^{-14}}{3{,}1 \times 10^{-12}} = 1{,}6 \times 10^{-2}$ s. La lecture graphique donne bien 16 ms ; une valeur entre 15 et 20 ms est acceptable.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$0.63 \times 54 \approx 34.02$$

2.1 Si la particule restait à la surface de l'eau, quelle durée τ_2 mettrait-elle pour parcourir la longueur L du bac ?

Données utiles $L = 1{,}0$ m ; $v_h = 0{,}10$ m · s^{-1}

La particule est entraînée par l'eau à la vitesse constante v_h sur la distance L :

$$\tau_2 = \frac{L}{v_h} = \frac{1{,}0}{0{,}10}$$

$\tau_2 = 10$ s

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{1.0}{0.10} \approx 10$$

2.2 En comparant τ_1 et τ_2, justifier que la vitesse de la particule dans la conduite peut s'écrire $\vec{v} = \vec{v}_h + \vec{v}_l$.

Données utiles $\tau_1 \approx 16$ ms (1.6) ; $\tau_2 = 10$ s (2.1)

$\dfrac{\tau_2}{\tau_1} = \dfrac{10}{16 \times 10^{-3}} \approx 6 \times 10^2$: τ_1 est très petit devant τ_2.

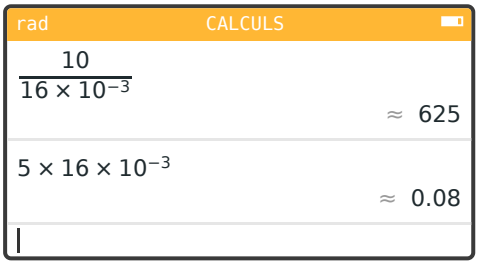
Le régime transitoire de la chute dure environ $5\,\tau_1 = 0{,}08$ s, soit moins de 1 % de la durée de la traversée. Sa durée est négligeable : on considère que la particule tombe à la vitesse verticale v_l dès son entrée dans le bac.

Elle est de plus entraînée horizontalement par l'eau à la vitesse $\vec{v}_h$.

$\tau_1 \ll \tau_2$: la vitesse limite est atteinte presque aussitôt, donc $\vec{v} = \vec{v}_h + \vec{v}_l$.

COMPRENDRE
Pendant le régime transitoire, la particule n'avance que de $0{,}10 \times 0{,}08 = 8 \times 10^{-3}$ m, soit 8 mm sur une longueur de 1 m.

À LA CALCULATRICE



2.3 Compléter la dernière ligne du tableau de l'annexe : les positions $x(t)$ et $z(t)$.

Chaque coordonnée de la position est une primitive de la coordonnée correspondante de la vitesse, qui est constante :

$x(t) = v_h\,t + x_0$ et $z(t) = v_l\,t + z_0$.

À $t = 0$, la particule est en $x_0 = 0$ et $z_0 = 0$: les deux constantes sont nulles.

$x(t) = v_h\,t$ et $z(t) = v_l\,t$

PIÈGE
Ne pas justifier les constantes d'intégration. Elles sont nulles ici grâce aux conditions initiales, et il faut l'écrire. Le sujet annonce « annexe 2 » alors que le tableau s'intitule « annexe 3 » : c'est le même.

	Projection selon Ox	Projection selon Oz
Accélération	$a_x(t) = 0$	$a_z(t) = 0$
Vitesse	$v_x(t) = v_h$	$v_z(t) = v_l$
Position	$x(t) = v_h \times t$	$z(t) = v_l \times t$

2.3 · Annexe complétée (dernière ligne)

2.4 En déduire que la trajectoire $z = f(x)$ est une droite, de coefficient directeur $\alpha = \dfrac{\rho_S - \rho_l}{\rho_S} \cdot \dfrac{m\,g}{f\,v_h}$.

On élimine le temps : $x = v_h\,t$ donne $t = \dfrac{x}{v_h}$, que l'on reporte dans $z = v_l\,t$:

$$z = \frac{v_l}{v_h}\,x$$

C'est une fonction linéaire de x : la trajectoire est une droite passant par l'origine, de coefficient directeur $\alpha = \dfrac{v_l}{v_h}$.

Avec l'expression de v_l établie à la question 1.4 :

$$z = \alpha\,x \text{ avec } \alpha = \frac{v_l}{v_h} = \frac{\rho_S - \rho_l}{\rho_S} \cdot \frac{m\,g}{f\,v_h}$$

MÉTHODE
Équation de trajectoire : exprimer t à partir de l'équation horaire la plus simple, puis le remplacer dans l'autre. Le temps disparaît, il reste une relation entre z et x.

2.5 Calculer la masse m_C d'une particule qui tombe dans le bac de récupération au point de coordonnées $x = L$ et $z = H_0$.

Données utiles $H_0 = 0{,}54$ m ; $L = 1{,}0$ m ; $v_h = 0{,}10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $f = 3{,}1 \times 10^{-12}\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$; $g = 9{,}8\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; ρ_S et ρ_l

Le point $(L\,;\,H_0)$ appartient à la trajectoire : $H_0 = \alpha\,L$, soit

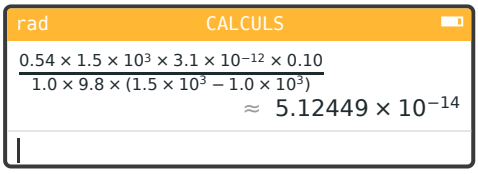
$$H_0 = \frac{\rho_S - \rho_l}{\rho_S} \cdot \frac{m_C\,g}{f\,v_h}\,L \quad\Longrightarrow\quad m_C = \frac{H_0\,\rho_S\,f\,v_h}{L\,g\,(\rho_S - \rho_l)}$$

$$m_C = \frac{0{,}54 \times 1{,}5 \times 10^3 \times 3{,}1 \times 10^{-12} \times 0{,}10}{1{,}0 \times 9{,}8 \times (1{,}5 \times 10^3 - 1{,}0 \times 10^3)}$$

$$m_C = 5{,}1 \times 10^{-14}\ \text{kg}$$

COMPRENDRE
La particule de la partie 1 ($m = 5{,}0 \times 10^{-14}$ kg) est un peu plus légère que m_C : avec ce modèle, elle arrive en $x = L$ à la profondeur 0,53 m, juste au-dessus du fond.

À LA CALCULATRICE



2.6 Dans quelle zone tombent les particules de masse m et de même masse volumique ρ_S si $m < m_C$, puis si $m > m_C$? Justifier.

Le coefficient directeur α est proportionnel à m. La particule atteint le fond ($z = H_0$) à l'abscisse $x = \dfrac{H_0}{\alpha}$, d'autant plus petite que m est grande.

- Si $m < m_C$: α est plus petit, donc en $x = L$ la profondeur $z = \alpha\,L$ est inférieure à H_0. La particule n'a pas atteint le fond en bout de conduite : elle sort avec l'eau, au-delà du bac de récupération.
- Si $m > m_C$: α est plus grand, le fond est atteint à une abscisse $x < L$. La particule tombe dans le bac de récupération, d'autant plus près de l'entrée qu'elle est lourde.

$m < m_C$: la particule est emportée au-delà du bac ; $m > m_C$: elle se dépose dans le bac, avant $x = L$.

COMPRENDRE
C'est le principe de la séparation : les particules les plus lourdes se déposent près de l'entrée, les plus légères plus loin. La masse m_C est la plus petite masse retenue par le bac.