Oscillateur solide - ressort

Bac S 2004 Nouvelle-Calédonie rattrapage (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1.1 Nommer les trois forces qui s'exercent sur le solide dans une position quelconque et les représenter en G sur le schéma n°1 de l'annexe.

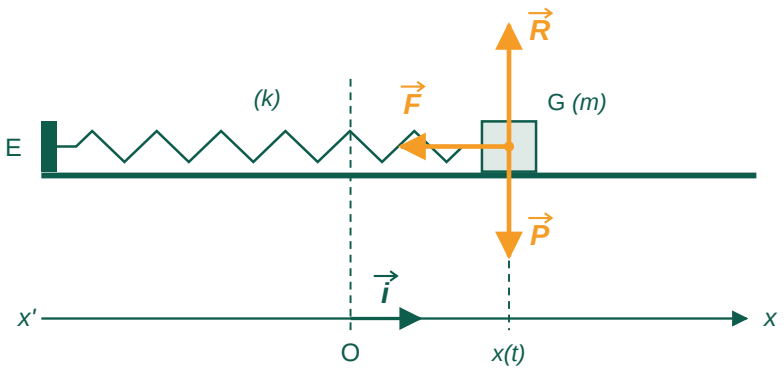
Système {solide}, référentiel terrestre supposé galiléen. Sans frottement, le solide est soumis à :

- son poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas ;
- la réaction $\vec{R}$ du banc (action du coussin d'air), verticale, vers le haut ;
- la force de rappel $\vec{F}$ du ressort, horizontale.

Trois forces : $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{F}$, tracées en G sur le schéma, avec $\vec{P}$ et $\vec{R}$ de même longueur.

PIÈGE
Sur le schéma, G est à droite de O : le ressort est étiré, $\vec{F}$ doit être dirigée vers la gauche. Sans frottement, $\vec{R}$ est perpendiculaire au banc.

COMPRENDRE
L'oscillateur masse-ressort ne figure plus au programme actuel de spécialité. L'exercice reste un bon entraînement à la deuxième loi de Newton, aux équations différentielles et à l'énergie mécanique.



1.1.1 · Schéma n°1 complété : les trois forces appliquées en G (G à droite de O)

1.1.2 Rappeler l'expression de $\vec{F}$ en fonction de l'allongement x et vérifier que cette force a le sens attendu lorsque G est à droite de la position d'équilibre.

Force de rappel : $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$.

Si G est à droite de O, alors $x > 0$. Comme $k > 0$, la coordonnée $F_x = -k\,x$ est négative : $\vec{F}$ est de sens opposé à $\vec{i}$, donc dirigée vers la gauche.

$\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$ avec $x > 0$: $\vec{F}$ est orientée vers O, le ressort étiré ramène le solide vers sa position d'équilibre.

COMPRENDRE
Le signe « $-$ » traduit le rappel : la force est toujours opposée à l'écart. Pour $x < 0$ (ressort comprimé), $F_x > 0$ et le ressort repousse le solide vers O.

1.2.1 En appliquant la deuxième loi de Newton au solide, établir l'équation différentielle du mouvement de son centre d'inertie G.

Deuxième loi de Newton appliquée au solide de masse m constante, dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}_G$$

Projection sur l'axe (Ox) : $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont verticales, leur coordonnée est nulle. Il reste $-k\,x = m\,a_x$ avec $a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel, bilan des forces, loi vectorielle, puis projection sur l'axe du mouvement. L'équation finale se présente avec tous les termes dans le même membre.

1.2.2 La solution générale est $x(t) = X_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi_0\right)$. Montrer que $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

On dérive deux fois la solution proposée :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\pi}{T_0}\,X_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi_0\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t + \varphi_0\right) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x(t)$$

En reportant dans l'équation différentielle :

$$\left[\frac{k}{m} - \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\right] x(t) = 0$$

Cette égalité doit être vraie à chaque instant, donc $\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \dfrac{k}{m}$, soit $\dfrac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, expression attendue.

PIÈGE
Chaque dérivation fait sortir le facteur $\dfrac{2\pi}{T_0}$: il apparaît au carré dans la dérivée seconde. Ne pas simplifier par $x(t)$ sans dire que l'égalité vaut pour tout t.

1.2.3 Vérifier l'homogénéité de l'expression de la période propre T_0 par une analyse dimensionnelle.

Une force est le produit d'une masse par une accélération : $[F] = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$.

D'après $F = k\,x$: $[k] = \dfrac{[F]}{\mathrm{L}} = \mathrm{M}\cdot\mathrm{T}^{-2}$.

Alors $\left[\dfrac{m}{k}\right] = \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}\cdot\mathrm{T}^{-2}} = \mathrm{T}^2$, et 2π est sans dimension.

$[T_0] = \left(\mathrm{T}^2\right)^{1/2} = \mathrm{T}$: l'expression est homogène à une durée.

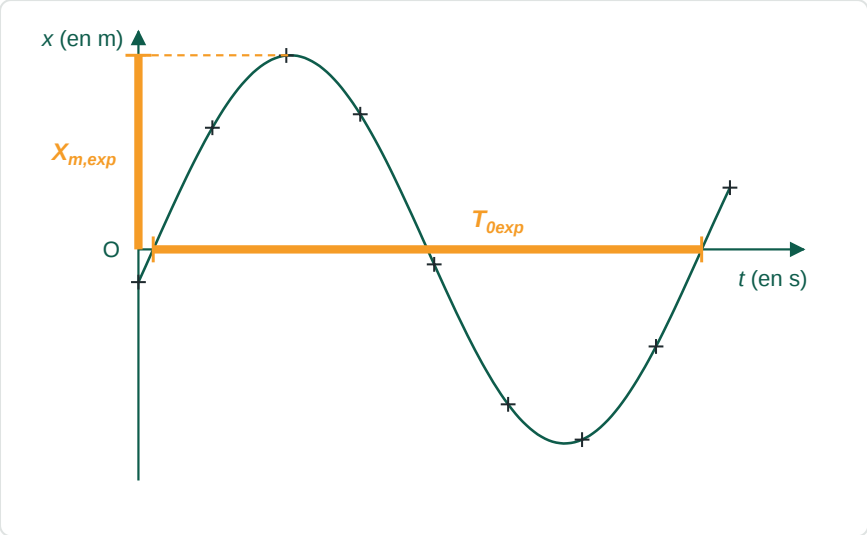
MÉTHODE
Pour la dimension d'une constante (k, G…), partir d'une relation connue où elle figure et isoler la constante. Les nombres comme 2π n'ont pas de dimension.

2.1 Représenter $T_{0\mathrm{exp}}$ et $X_{m,\mathrm{exp}}$ par des segments en trait épais sur chacun des deux axes du graphe n°1 de l'annexe.

- $T_{0\mathrm{exp}}$: segment porté par l'axe des dates, entre deux passages successifs par $x = 0$ dans le même sens (le premier et le troisième passage en O).
- $X_{m,\mathrm{exp}}$: segment porté par l'axe des abscisses x, de l'origine jusqu'à la valeur maximale de x.

Voir le graphe n°1 complété : les deux segments sont tracés en trait épais sur les axes.

PIÈGE
Entre deux passages consécutifs par O, il ne s'écoule qu'une demi-période. L'amplitude se mesure de 0 au maximum, pas du minimum au maximum.



2.1 · Graphe n°1 complété : $T_{0\text{exp}}$ sur l'axe des dates, $X_{m,\text{exp}}$ sur l'axe des abscisses

2.2 Déterminer, en justifiant, les valeurs expérimentales de l'amplitude $X_{m,\text{exp}}$ et de la période propre $T_{0\text{exp}}$ à partir de la modélisation de la courbe.

Données utiles modélisation $x = a\cos(bt + c)$ avec $a = 4{,}25 \times 10^{-2}$ m ; $b = 21{,}18$ rad · s^{-1} ; $c = 4{,}71$ rad

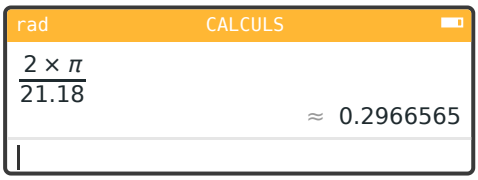
On identifie le modèle $x = a\cos(bt + c)$ à la solution $x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_0\right)$:

- $a = X_{m,\text{exp}}$;
- $b = \frac{2\pi}{T_{0\text{exp}}}$, donc $T_{0\text{exp}} = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{21{,}18} = 0{,}2967$ s.

$X_{m,\text{exp}} = 4{,}25 \times 10^{-2}$ m et $T_{0\text{exp}} = 0{,}2967$ s

COMPRENDRE
Chiffres significatifs : b en comporte quatre, $T_{0\text{exp}}$ aussi ; a en comporte trois. Le facteur 2π est exact et ne limite pas la précision.

À LA CALCULATRICE



2.3 Les deux ressorts équivalent à un seul ressort de raideur $k = 2k_1$. Calculer la période propre théorique T_0 des oscillations.

Données utiles $m = 54{,}0$ g ; $k_1 = 12{,}0$ N · m^{-1}

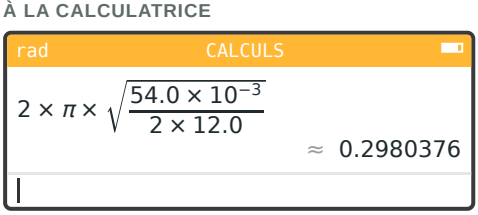
$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k_1}}$ avec $m = 54{,}0 \times 10^{-3}$ kg.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{54{,}0 \times 10^{-3}}{2 \times 12{,}0}}$$

$T_0 = 0{,}298$ s

PIÈGE
La masse doit être en kilogrammes : avec 54,0 on trouve 9,42 s, valeur absurde pour ce montage. Ne pas oublier le facteur 2 devant k_1.

À LA CALCULATRICE



2.4 Comparer les deux valeurs de la période propre en calculant l'écart relatif $\frac{T_{0\text{exp}} - T_0}{T_0}$.

Données utiles $T_{0\text{exp}} = 0{,}2967$ s (2.2) ; $T_0 = 0{,}298$ s (2.3)

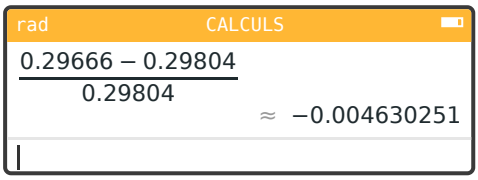
Avec les valeurs non arrondies ($T_{0\text{exp}} = 0{,}29666$ s et $T_0 = 0{,}29804$ s) :

$$\frac{T_{0\text{exp}} - T_0}{T_0} = \frac{0{,}29666 - 0{,}29804}{0{,}29804} = -4{,}6 \times 10^{-3}$$

Écart relatif de $-0{,}46\ \%$, soit moins de $0{,}5\ \%$ en valeur absolue : l'expérience est en très bon accord avec la théorie.

COMPRENDRE
Les deux périodes sont très proches : leur différence perd des chiffres significatifs. On garde donc les valeurs non arrondies dans le calcul et on arrondit seulement le résultat final.

À LA CALCULATRICE



3.1 Rappeler l'expression de l'énergie mécanique E_m du système solide-ressort horizontal en fonction de m, k, x et v.

$E_m = E_C + E_P$. Le mouvement est horizontal : G reste à l'altitude de référence, l'énergie potentielle de pesanteur est nulle. Il reste l'énergie cinétique et l'énergie potentielle élastique.

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

3.2 En traduisant la propriété de l'énergie mécanique, montrer que la vitesse maximale vérifie $V_m = 2\pi \frac{X_m}{T_0}$.

Sans frottement, l'énergie mécanique se conserve.

- En $x = \pm X_m$, la vitesse s'annule : $E_m = \frac{1}{2} k X_m^2$.
- En $x = 0$, l'énergie potentielle élastique est nulle et la vitesse est maximale : $E_m = \frac{1}{2} m V_m^2$.

Donc $\frac{1}{2} m V_m^2 = \frac{1}{2} k X_m^2$, soit $V_m = X_m \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Or $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ donne $\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_0}$.

$V_m = 2\pi \frac{X_m}{T_0}$, expression attendue.

MÉTHODE
Conservation de l'énergie : écrire E_m en deux positions bien choisies, là où l'un des deux termes s'annule, puis égaler les deux expressions.

3.3 Calculer la valeur de la vitesse maximale du mobile pour une amplitude de 4,3 cm et une période propre de 0,30 s.

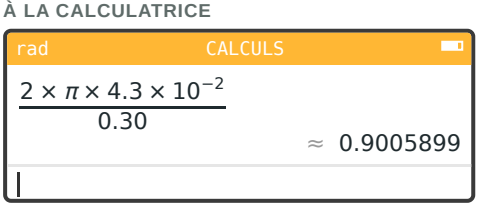
Données utiles $X_m = 4{,}3$ cm ; $T_0 = 0{,}30$ s

$$V_m = 2\pi \frac{X_m}{T_0} = 2\pi \times \frac{4{,}3 \times 10^{-2}}{0{,}30}$$

$V_m = 0{,}90\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

PIÈGE
Laisser l'amplitude en centimètres donne 90 : ce serait une vitesse en $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Deux chiffres significatifs, comme les données.

À LA CALCULATRICE

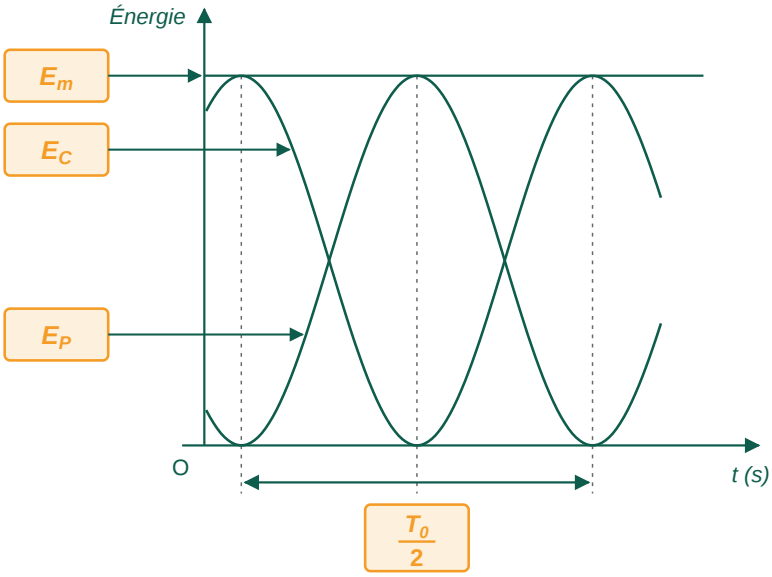


3.4 Indiquer dans les cases grisées du graphe n°2 la durée désignée par la double flèche, en fonction de T_0, et les énergies E_m, E_P et E_C.

- La droite horizontale est E_m, constante en l'absence de frottement.
- D'après le graphe n°1, peu après $t = 0$ le solide passe en O ($x = 0$) : E_P y est nulle et E_C maximale. La courbe qui part près de son maximum est E_C, celle qui part près de zéro est E_P.
- La double flèche sépare deux maxima successifs de E_C, donc deux passages successifs en O.

Durée de la double flèche : $\frac{T_0}{2}$; cases, de haut en bas : E_m, E_C, E_P.

COMPRENDRE
Les énergies dépendent de x^2 et de v^2 : elles reprennent la même valeur deux fois par oscillation. Leur période est $T_0/2$, moitié de celle de $x(t)$.



3.4 · Graphe n°2 complété

4.1 De quel régime s'agit-il lorsqu'on observe encore des oscillations malgré les frottements ? Comment nomme-t-on le temps caractéristique T correspondant ?

Les frottements sont faibles : le solide oscille encore, mais l'amplitude diminue au cours du temps.

Régime **pseudo-périodique** ; la durée T est la **pseudo-période**.

COMPRENDRE
Le mouvement n'est plus périodique puisque l'amplitude décroît. Avec des frottements plus importants, le solide reviendrait à l'équilibre sans osciller : régime apériodique.

4.2.1 Établir l'expression de l'énergie mécanique E_{m0} en fonction de l'allongement maximum initial X_{m0}.

À l'instant du lâcher, la vitesse est nulle donc $E_C = 0$, et l'allongement vaut X_{m0} : l'énergie est entièrement potentielle élastique.

$$E_{m0} = \frac{1}{2} k X_{m0}^2$$

4.2.2 Au bout d'une oscillation, l'amplitude est divisée par r. Établir l'expression du rapport $\frac{E_{m1}}{E_{m0}}$ en fonction de r.

Après une oscillation, l'amplitude est $X_{m1} = \frac{X_{m0}}{r}$. À cet instant la vitesse s'annule, donc :

$$E_{m1} = \frac{1}{2} k X_{m1}^2 = \frac{1}{2} k \frac{X_{m0}^2}{r^2} = \frac{E_{m0}}{r^2}$$

$$\boxed{\frac{E_{m1}}{E_{m0}} = \frac{1}{r^2}}$$

COMPRENDRE

L'énergie varie comme le carré de l'amplitude : une amplitude divisée par 2 correspond à une énergie divisée par 4. L'énergie perdue est dissipée par les frottements, sous forme de transfert thermique.