Nouvelle Calédonie 03/2005 **EXERCICE III OSCILLATEUR SOLIDE - RESSORT (5,5 points)**

Le but de cet exercice est de vérifier l'accord entre l'expérience et la théorie dans le cas des oscillations libres d'un système solide-ressort horizontal.

Étude expérimentale :

Au laboratoire on filme, avec une caméra numérique, les oscillations libres d'un solide de masse m. Ce solide est attaché à deux ressorts identiques à spires non jointives, de constante de raideur k_1, et il est posé sur un banc à coussin d'air horizontal ***(figure 1).***

m = 54,0 g, la masse des ressorts est négligeable et k_1 = 12,0 N.m^{-1}.

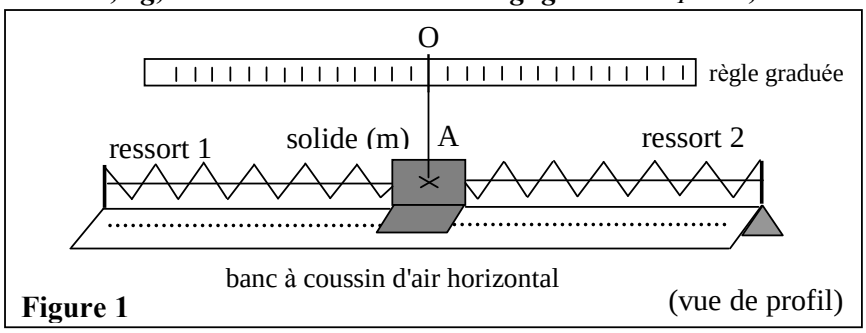


Figure 1

Les deux ressorts restent tendus pendant toute l'expérience. Une règle graduée horizontale est placée à la verticale au dessus du banc. Lorsque le système solide-ressorts est en équilibre, la soufflerie du banc étant en fonctionnement, le point A repéré sur le solide est à la verticale du zéro de la règle graduée ***(figure 1).*** *On écarte alors le solide vers la gauche et on l'abandonne sans vitesse initiale. Le point A oscille entre les positions B et C ; on filme les oscillations* ***(figure 2).***

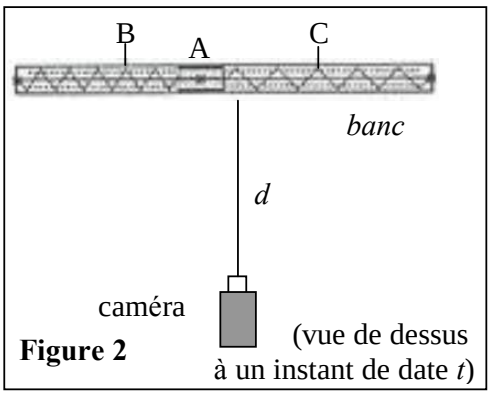


Figure 2

La fréquence d'enregistrement des images est égale à 25 images par seconde. La caméra est placée dans le même plan horizontal que le banc, à une distance d de celui-ci, grande devant la distance BC. Son axe optique (ou axe de visée) en pointillés sur la ***figure 2*** *est perpendiculaire au banc et passe par A lorsque le système est à l'équilibre.*

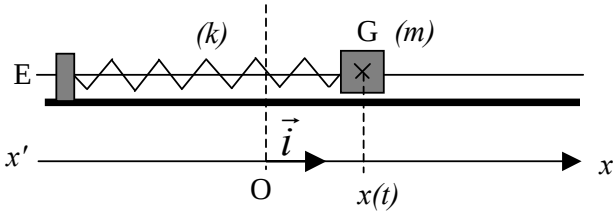
Un logiciel approprié permet de pointer les différentes positions du point A sur l'écran vidéo entre ses deux positions extrêmes B et C.

*On commence le pointage un peu avant le premier passage du point A à la verticale du point O et on le poursuit un peu après son troisième passage à la verticale du point O. Le fichier de données est transféré vers un tableur qui permet de modéliser et d'afficher la courbe x = f(t), x étant l'abscisse du point A par rapport à l'origine O. On obtient le graphe n°1 de l'****ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.***

L'origine des dates t = 0 s correspond au passage du point A à la première position enregistrée.

1. Étude théorique du mouvement du solide

Dans cette étude tous les frottements sont négligés.
On peut modéliser un oscillateur mécanique horizontal par un système solide-ressort constitué d'un solide de masse m, fixé à l'extrémité d'un seul ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur k.



La position du centre d'inertie G du solide est étudiée dans un référentiel terrestre considéré comme galiléen et repérée par son abscisse x(t) sur un axe horizontal x'Ox. L'origine des abscisses correspond à l'abscisse de G lorsque le solide est à l'équilibre.

Le solide est mis en oscillation. La période propre des oscillations est T_0.

1.1. Forces exercées sur le solide en mouvement.

1.1.1. *On note $\vec{F}$ la force exercée par le ressort sur le solide.*
Pour une position quelconque du solide, nommer les trois forces qui s'exercent sur ce solide. Les représenter au centre d'inertie G, sans souci d'échelle, sur le schéma n°1 de l'**ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.**

1.1.2. En rappelant l'expression du vecteur force $\vec{F}$ en fonction de l'allongement x, vérifier mathématiquement que cette force a bien le sens attendu lorsque le centre d'inertie G se trouve à droite de la position d'équilibre sur le schéma n°1 de l'**ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE.**

1.2. Équation différentielle du mouvement du solide.

1.2.1. En appliquant la deuxième loi de Newton au solide, établir l'équation différentielle du mouvement de son centre d'inertie G.

1.2.2. Sachant que la solution générale de l'équation différentielle est de la forme : $x(t) = X_m \cos\left[\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)t + \varphi_0\right]$

montrer que l'expression de la période propre T_0 de l'oscillateur est : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

1.2.3. Vérifier l'homogénéité de l'expression de la période propre T_0 par une analyse dimensionnelle.

2. Retour à l'expérience

On rappelle qu'il est équivalent dans cette étude de considérer le mouvement d'un point A quelconque repéré sur le solide en translation ou celui du centre d'inertie G du solide.

2.1. Représenter les grandeurs expérimentales $T_{0\text{exp}}$ et $X_{m,\text{exp}}$ par des segments en **trait épais** sur chacun des deux axes de la courbe $x = f(t)$ (**graphe n°1** de l'**ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE**).

2.2. Déterminer les valeurs expérimentales de l'amplitude $X_{m,\text{exp}}$ et de la période propre $T_{0\text{exp}}$ des oscillations du mouvement du solide à partir du résultat de la modélisation de la courbe donnée dans l'**ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.** Justifier.

2.3. *Les deux ressorts de constante de raideur k_1 sont équivalents à un seul ressort de raideur $k = 2k_1$. L'expression de la période propre T_0 trouvée dans l'étude théorique reste valable dans le cas de deux ressorts initialement tendus.*
Calculer à partir des résultats de l'étude théorique la période propre T_0 des oscillations.

2.4. Comparer les deux valeurs de la période propre en calculant l'écart relatif $\left|\frac{T_{0\,exp} - T_0}{T_0}\right|$

3. Aspect énergétique en l'absence de frottements

Le système solide-ressort est toujours supposé osciller sans frottement.
Dans le modèle d'oscillateur adopté, le choix des états de référence est tel que :

- *L'énergie potentielle de pesanteur est nulle à l'altitude du centre d'inertie G ;*
- *L'énergie potentielle élastique est nulle lorsque l'allongement du ressort est nul.*

3.1. Rappeler l'expression de l'énergie mécanique E_m du système solide-ressort horizontal dans le champ de pesanteur à la position d'abscisse x quelconque, en fonction de m, k, x et v la valeur de la vitesse du centre d'inertie G dans le référentiel terrestre.

3.2. *Soit V_m la valeur maximale de la vitesse atteinte par le centre d'inertie G pour les oscillations d'amplitude X_m étudiées.*

En traduisant la propriété de l'énergie mécanique donnée au 3.1., montrer que : $V_m = 2\pi.\frac{X_m}{T_0}$

3.3. Calculer la valeur de la vitesse maximale du mobile pour une amplitude de 4,3 cm et une période propre de 0,30 s.

3.4. En vous aidant du **graphe n°1**, indiquer dans les cases grisées du **graphe n°2** de l'**ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE :**

- la durée désignée par la double flèche, en fonction de T_0 ;
- Les énergies : E_m, E_P (énergie potentielle élastique) et E_C (énergie cinétique).

4. Aspect énergétique en présence de frottements

Le système solide-ressort est toujours supposé osciller, mais désormais on tient compte des frottements.

4.1. De quel régime s'agit-il dans le cas où l'on observe toujours des oscillations bien que l'on ne puisse plus négliger les frottements ? Comment nomme-t-on le temps caractéristique T correspondant ?

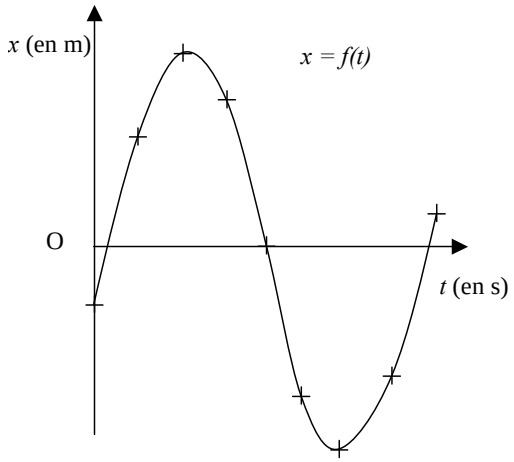
4.2. *Soit E_{m0} la valeur de l'énergie mécanique de l'oscillateur lâché sans vitesse initiale avec un allongement maximum initial X_{m0}.*

4.2.1. Établir l'expression de l'énergie mécanique E_{m0} en fonction de l'allongement maximum initial X_{m0}.

4.2.2. *On constate expérimentalement qu'au bout d'une oscillation, l'amplitude du mouvement est divisée par r (nombre réel positif non nul).*
Établir l'expression du rapport de l'énergie mécanique correspondante E_{m1} à l'énergie mécanique initiale E_{m0} en fonction de r.

ANNEXE EXERCICE III

Graphe n°1:



La modélisation de cette courbe donne: $x = a.\cos(b.t + c)$ avec : $a = 4{,}25\times10^{-2}$ m, $b = 21{,}18 rad.s^{-1}$ et $c = 4{,}71$ rad.

Graphe n°2 :

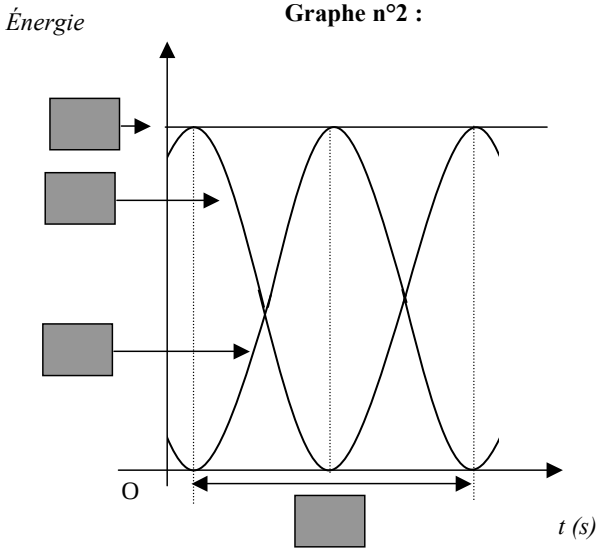


Schéma n°1

