La tomographie par émission de positons: une technique d'imagerie médicale

Bac S 2004 Nouvelle-Calédonie rattrapage (ancien programme) · Exercice 3 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 Donner, en la justifiant, l'écriture symbolique ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ du noyau d'oxygène 15.

D'après le texte, ce noyau contient 8 protons et 7 neutrons.

Numéro atomique : $Z = 8$. Nombre de nucléons : $A = 8 + 7 = 15$.

${}^{15}_{8}\mathrm{O}$

PIÈGE
Inverser les deux nombres : A (nucléons) s'écrit en haut, Z (protons) en bas. Le nombre de neutrons, $A - Z = 7$, n'apparaît pas dans le symbole.

1.2 Écrire l'équation de la désintégration du noyau d'oxygène 15, sans tenir compte du neutrino.

L'oxygène 15 est émetteur β^+ : il émet un positon ${}^{0}_{1}\mathrm{e}$. Le noyau fils a pour nombre de charge $8 - 1 = 7$ (azote) et pour nombre de nucléons $15 - 0 = 15$.

${}^{15}_{8}\mathrm{O} \rightarrow {}^{15}_{7}\mathrm{N} + {}^{0}_{1}\mathrm{e}$

PIÈGE
Écrire ${}^{0}_{-1}\mathrm{e}$: ce serait un électron (radioactivité β^-) et le noyau fils serait du fluor.

COMPRENDRE
Un proton du noyau devient un neutron : A ne change pas, Z diminue d'une unité. Le noyau fils figure dans le tableau de données : c'est l'azote 15.

1.3.1 Définir l'énergie de liaison E_l du noyau.

L'énergie de liaison E_l est l'énergie qu'il faut fournir à un noyau au repos pour le séparer en ses nucléons isolés et au repos.

COMPRENDRE
Elle est liée au défaut de masse du noyau : $E_l = \Delta m \cdot c^2$, où Δm est la masse des nucléons séparés moins celle du noyau. Elle est toujours positive.

1.3.2 Calculer, en MeV, la variation d'énergie ΔE_3 indiquée sur la figure 1.

Données utiles $\frac{E_l}{A}\left({}^{15}_{7}\mathrm{N}\right) = 7{,}699\ \mathrm{MeV \cdot nucléon^{-1}}$; noyau fils ${}^{15}_{7}\mathrm{N}$ (1.2)

ΔE_3 correspond au passage des 7 protons et 8 neutrons séparés au noyau d'azote 15, le positon restant inchangé. C'est l'opposé de l'énergie de liaison du noyau fils :

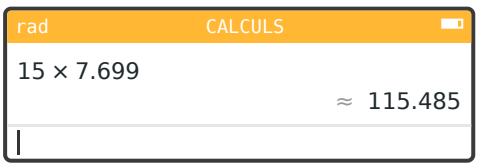
$$\Delta E_3 = -E_l\left({}^{15}_{7}\mathrm{N}\right) = -A \times \frac{E_l}{A} = -15 \times 7{,}699$$

$\Delta E_3 = -115{,}5\ \mathrm{MeV}$

PIÈGE
Oublier le signe. La flèche de ΔE_3 descend : les nucléons qui s'assemblent cèdent de l'énergie, alors que $\Delta E_1 = +E_l\left({}^{15}_{8}\mathrm{O}\right)$ est positif.

COMPRENDRE
Quatre chiffres significatifs, comme la donnée $7{,}699$; le nombre de nucléons 15 est exact. Même précision que $\Delta E_1 = 15 \times 7{,}463 = 111{,}9$ MeV.

À LA CALCULATRICE



1.3.3 En utilisant les masses des particules, calculer, en MeV, la variation d'énergie ΔE_2 (deux chiffres significatifs).

Données utiles $m_p = 1{,}672\,62 \times 10^{-27}$ kg ; $m_n = 1{,}674\,92 \times 10^{-27}$ kg ; $m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}$ kg ; $c = 2{,}998 \times 10^{8}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $1\ \text{MeV} = 1{,}602 \times 10^{-13}$ J

ΔE_2 correspond au passage de (8 p + 7 n) à (7 p + 8 n + un positon), toutes les particules étant au repos :

$$\Delta E_2 = [(7\,m_p + 8\,m_n + m_e) - (8\,m_p + 7\,m_n)]\,c^2 = (m_n + m_e - m_p)\,c^2$$

$$\Delta E_2 = \left(1{,}674\,92 \times 10^{-27} + 9{,}109 \times 10^{-31} - 1{,}672\,62 \times 10^{-27}\right) \times \left(2{,}998 \times 10^{8}\right)^2 = 2{,}886 \times 10^{-13}\ \text{J}$$

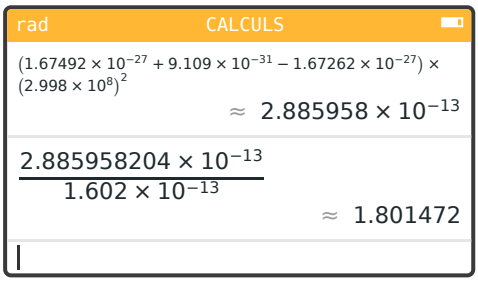
$$\Delta E_2 = \frac{2{,}886 \times 10^{-13}}{1{,}602 \times 10^{-13}} = 1{,}801\ \text{MeV}$$

$$\boxed{\Delta E_2 = 1{,}8\ \text{MeV}}$$

PIÈGE
Arrondir les masses avant de les soustraire : $m_n - m_p$ ne porte que sur les derniers chiffres. Oublier la masse du positon donne $1{,}3$ MeV au lieu de $1{,}8$ MeV.

MÉTHODE
Variation d'énergie de masse : (masse finale − masse initiale) $\times c^2$, masses en kg et résultat en joules. Conversion ensuite : $1\ \text{MeV} = 10^{6} \times 1{,}602 \times 10^{-19}$ J.

À LA CALCULATRICE



1.3.4 Déduire des résultats précédents la valeur, en MeV, de la variation d'énergie ΔE lors de la désintégration d'un noyau d'oxygène 15.

Données utiles $\Delta E_1 = 111{,}9$ MeV ; $\Delta E_2 = 1{,}8$ MeV (1.3.3) ; $\Delta E_3 = -115{,}5$ MeV (1.3.2)

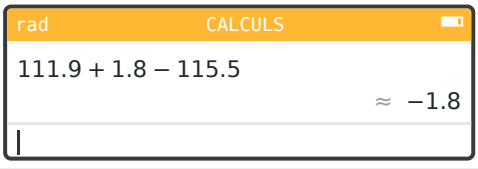
Sur le diagramme, on passe du noyau d'oxygène 15 à l'ensemble (noyau fils + positon) par les trois étapes successives :

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3 = 111{,}9 + 1{,}8 - 115{,}5$$

$$\boxed{\Delta E = -1{,}8\ \text{MeV}}$$

COMPRENDRE
ΔE est négative : le système perd de l'énergie de masse. Cette énergie, $1{,}8$ MeV par noyau, est libérée vers l'extérieur, emportée surtout par le positon et le neutrino.

À LA CALCULATRICE



2.1 Définir le temps de demi-vie $t_{1/2}$.

Le temps de demi-vie $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents dans un échantillon s'est désintégrée : $N(t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$.

2.2.1 À partir de la loi de décroissance, montrer que la constante radioactive a pour expression $\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$.

Loi de décroissance : $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$.

À la date $t = t_{1/2}$, $N(t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$, donc $\dfrac{N_0}{2} = N_0\, e^{-\lambda t_{1/2}}$, soit $e^{-\lambda t_{1/2}} = \dfrac{1}{2}$.

En prenant le logarithme : $-\lambda\, t_{1/2} = \ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}}$$

MÉTHODE
Pour isoler une durée ou une constante placée dans une exponentielle : isoler l'exponentielle, puis appliquer $\ln$ aux deux membres, avec $\ln(e^x) = x$ et $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$.

2.2.2 Calculer la valeur de la constante radioactive λ.

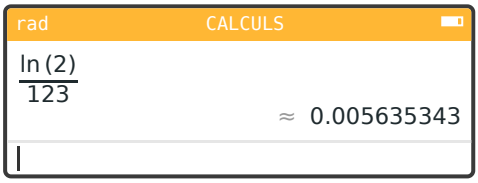
Données utiles $t_{1/2} = 123$ s

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{123}$$

$$\boxed{\lambda = 5{,}64 \times 10^{-3}\ \text{s}^{-1}}$$

PIÈGE
Oublier l'unité : λ est l'inverse d'une durée, ici en s^{-1} puisque $t_{1/2}$ est en secondes.

À LA CALCULATRICE



2.3 Calculer la date t_1 à laquelle le nombre de noyaux d'oxygène 15 restants est de l'ordre de 5 % du nombre N_0 initialement injecté.

Données utiles $N(t_1) = 0{,}05\, N_0$; $\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$ (2.2.1) ; $t_{1/2} = 123$ s

$N(t_1) = N_0\, e^{-\lambda t_1} = 0{,}05\, N_0$, donc $e^{-\lambda t_1} = 0{,}05$, soit $-\lambda\, t_1 = \ln(0{,}05)$.

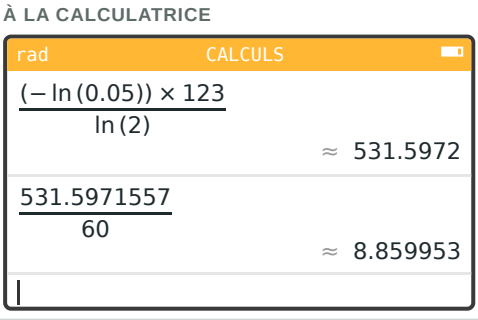
$$t_1 = -\frac{\ln(0{,}05)}{\lambda} = -\frac{\ln(0{,}05) \times t_{1/2}}{\ln 2} = -\frac{\ln(0{,}05) \times 123}{\ln 2}$$

$$\boxed{t_1 = 532\ \text{s, soit environ } 9\ \text{min.}}$$

PIÈGE
Écrire $N(t_1) = 0{,}95\, N_0$: 5 % est la part des noyaux restants, pas celle des noyaux désintégrés.

COMPRENDRE
Vérification rapide : $0{,}05 \approx \dfrac{1}{2^{4{,}3}}$, il faut donc un peu plus de quatre demi-vies, soit un peu plus de $4 \times 123 = 492$ s. Le résultat est cohérent.

À LA CALCULATRICE



2.4 Justifier la durée d'espacement des injections évoquée dans le texte.

Données utiles $t_1 \approx 9$ min (2.3)

Le texte indique que deux injections successives sont espacées de 8 à 10 minutes.

Au bout de $t_1 \approx 9$ min, il ne reste qu'environ 5 % des noyaux d'oxygène 15 injectés : l'activité est devenue trop faible pour poursuivre l'examen et une nouvelle injection est nécessaire.

La date $t_1 \approx 9$ min est comprise entre 8 et 10 min : l'espacement annoncé dans le texte est justifié.

3.1 Écrire l'équation de la réaction ayant lieu lors de la rencontre d'un positon avec un électron du milieu, en notant γ chaque photon émis.

D'après le texte, le positon et l'électron s'annihilent en libérant une paire de photons.

$${}^{0}_{1}\mathrm{e} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} \rightarrow 2\,\gamma$$

COMPRENDRE

Le photon n'a ni charge ni nucléon : on peut le noter ${}^{0}_{0}\gamma$. La charge est bien conservée : $1 + (-1) = 0$.

3.2 Calculer l'énergie de chaque photon gamma émis, l'énergie libérée étant partagée également entre les deux photons. Est-elle en accord avec celle donnée dans le texte ?

Données utiles $m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}$ kg (électron et positon) ; $c = 2{,}998 \times 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $1\ \mathrm{eV} = 1{,}602 \times 10^{-19}$ J ; texte : 511 keV

Toute la masse du positon et de l'électron est transformée en énergie : $E_{\text{libérée}} = 2\,m_e\,c^2$.

Chaque photon en emporte la moitié :

$$E_\gamma = \frac{2\,m_e\,c^2}{2} = m_e\,c^2$$

$$E_\gamma = 9{,}109 \times 10^{-31} \times \left(2{,}998 \times 10^{8}\right)^2 = 8{,}187 \times 10^{-14}\ \mathrm{J}$$

$$E_\gamma = \frac{8{,}187 \times 10^{-14}}{1{,}602 \times 10^{-19}} = 5{,}111 \times 10^{5}\ \mathrm{eV}$$

$E_\gamma = 511{,}1\ \mathrm{keV}$: cette valeur est en accord avec les 511 keV du texte.

COMPRENDRE

L'électron et le positon sont supposés au repos : leur énergie cinétique est négligée devant leur énergie de masse. L'énergie totale libérée vaut $1{,}637 \times 10^{-13}$ J, soit 1,022 MeV.

À LA CALCULATRICE

