Le Grand saut

Bac S 2004 Liban (ancien programme) · Exercice 4 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1 Partie A (question unique). Comparer, au niveau du sol, le poids de l'ensemble {ballon + nacelle + sauteur} à la poussée d'Archimède qui s'exerce sur le ballon. Conclure.

Données utiles $m = 1{,}6 \times 10^3$ kg ; $V_b = 4{,}0 \times 10^3\ \text{m}^3$; $g = 9{,}8\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$; $\mu = 1234\ \text{g} \cdot \text{m}^{-3} = 1{,}234\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Poids de l'ensemble : $P = m\,g = 1{,}6 \times 10^3 \times 9{,}8 = 1{,}6 \times 10^4$ N.

La poussée d'Archimède a pour valeur le poids du volume d'air déplacé par le ballon :

$$\Pi = \mu\, V_b\, g = 1{,}234 \times 4{,}0 \times 10^3 \times 9{,}8 = 4{,}8 \times 10^4\ \text{N}$$

$\dfrac{\Pi}{P} = \dfrac{\mu\, V_b}{m} \approx 3{,}1$: la poussée, verticale vers le haut, est environ trois fois plus grande que le poids, vertical vers le bas.

$\Pi = 4{,}8 \times 10^4\ \text{N} > P = 1{,}6 \times 10^4\ \text{N}$: la résultante est dirigée vers le haut, le ballon décolle et s'élève.

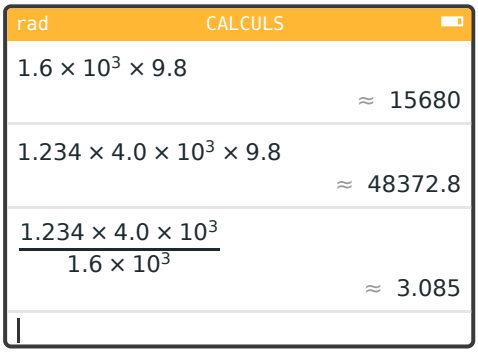
PIÈGE

Laisser μ en $\text{g} \cdot \text{m}^{-3}$: la poussée serait mille fois trop grande. Autre erreur : utiliser la masse volumique de l'hélium, alors que c'est l'air déplacé qui compte.

COMPRENDRE

Deux chiffres significatifs, comme m, V_b et g, les données les moins précises. « Comparer » demande une conclusion chiffrée, ici un rapport.

À LA CALCULATRICE



1 Partie B. À l'aide du document, indiquer brièvement et sans calcul pourquoi on peut faire l'hypothèse d'une chute libre pour la première partie du saut.

Données utiles document : masse volumique de l'air $1{,}8\ \text{g} \cdot \text{m}^{-3}$ à $40\,000$ m, $1234\ \text{g} \cdot \text{m}^{-3}$ au sol

Un corps est en chute libre s'il n'est soumis qu'à son poids.

D'après le document, l'air est très raréfié à $40\,000$ m : sa masse volumique n'est que de $1{,}8\ \text{g} \cdot \text{m}^{-3}$, plusieurs centaines de fois plus faible qu'au sol. Les actions de l'air sur le sauteur (frottements et poussée d'Archimède) sont donc négligeables devant le poids.

Dans la haute stratosphère, l'air est si peu dense que seul le poids agit de façon notable : la chute peut être considérée comme libre.

COMPRENDRE

Les guillemets de « chute libre » dans l'énoncé rappellent que, pour les parachutistes, l'expression désigne toute la descente avant l'ouverture du parachute. En physique, elle n'est valable ici que dans la haute atmosphère.

2 Partie B. Lorsque la vitesse du son est atteinte : a) calculer la durée de chute depuis le largage ; b) calculer la hauteur de chute et l'altitude atteinte ; c) comparer ces résultats aux données du document et conclure.

Données utiles vitesse initiale nulle à l'altitude $h_0 = 40$ km ; $g = 9{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $v_{son} = 1067\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

a) Système {sauteur}, référentiel terrestre supposé galiléen, axe vertical Ox dirigé vers le bas, origine au point de largage. En chute libre, la deuxième loi de Newton donne $m\vec{a} = m\vec{g}$, soit $a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = g$.

Par intégration, avec $v_x(0) = 0$: $v_x = g\,t$.

$v_{son} = \dfrac{1067}{3{,}6} = 296\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, donc $t = \dfrac{v_{son}}{g} = \dfrac{296}{9{,}7} = 31\ \text{s}$.

b) Par une nouvelle intégration, avec $x(0) = 0$: $x = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2$. En remplaçant t par $\dfrac{v_{son}}{g}$:

$$x = \frac{v_{son}^2}{2\,g} = \frac{296^2}{2 \times 9{,}7} = 4{,}5 \times 10^3\ \text{m}$$

Altitude atteinte : $h = h_0 - x = 40 - 4{,}5 = 35{,}5$ km.

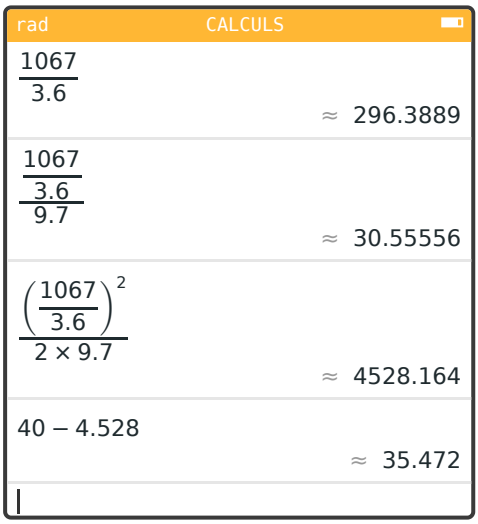
c) Le film du saut annonce Mach 1 à 35 000 m, 30 secondes après le largage : les valeurs calculées (31 s et 35,5 km) en sont très proches.

$t = 31$ s ; hauteur de chute $4{,}5$ km ; altitude $35{,}5$ km. L'accord avec le document (30 s, 35 000 m) valide l'hypothèse de chute libre.

PIÈGE
Garder la vitesse en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ dans $t = v/g$. Confondre aussi la hauteur de chute (4,5 km) et l'altitude atteinte, qui s'obtient en la retranchant de 40 km.

MÉTHODE
Chute libre sans vitesse initiale : $a = g$, puis deux intégrations successives avec les conditions initiales donnent $v = g\,t$ et $x = \frac{1}{2}\,g\,t^2$. Éliminer t fournit directement $x = \dfrac{v^2}{2g}$.

À LA CALCULATRICE



1 Partie C. La force de frottement a pour valeur $f = k\,v^2$. À partir d'une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité de la constante k dans le Système international.

$k = \dfrac{f}{v^2}$. Une force est le produit d'une masse par une accélération : elle s'exprime en $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Le carré d'une vitesse s'exprime en $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$.

$$\text{unité de } k = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}} = \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$$

k s'exprime en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$: $k = 0{,}78\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$.

MÉTHODE
Pour l'unité d'une constante : l'isoler dans la relation, puis remplacer chaque grandeur par son unité de base. Le newton n'est pas une unité de base : $1\ \text{N} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, d'après $F = m\,a$.

2 Partie C. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$ au cours de la chute, sur un axe vertical dirigé vers le bas.

Système {sauteur + équipement}, de masse m, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Forces : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$, vertical vers le bas ; la force de frottement $\vec{f}$, verticale vers le haut (opposée au mouvement), de valeur $k\,v^2$. La poussée d'Archimède est négligée.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}$.

En projection sur l'axe vertical dirigé vers le bas : $m\,g - k\,v^2 = m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{k}{m}\,v^2$$

PIÈGE
Se tromper de signe en projetant : avec l'axe vers le bas, le poids compte positivement et le frottement négativement. Oublier de diviser par m fausse ensuite les constantes de la méthode d'Euler.

3 Partie C. a) Montrer que l'équation différentielle peut s'écrire $v_{n+1} = v_n + A - B\,v_n^2$ avec $A = 4{,}9$ SI et $B = 1{,}95 \times 10^{-3}$ SI ; préciser les unités de A et B. b) Sur la figure 1, indiquer l'ordre de grandeur de la durée nécessaire pour atteindre la vitesse limite et la valeur de cette vitesse en $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$; comparer à la prévision du film du saut.

Données utiles $\Delta t = 0{,}5$ s ; $m = 200$ kg ; $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $k = 0{,}78\ \mathrm{kg \cdot m^{-1}}$ (Q1) ; film du saut : $180\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ à l'ouverture du parachute

a) Sur la petite durée Δt, on assimile la dérivée au taux de variation : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx \dfrac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t}$, l'accélération étant calculée à l'instant t_n.

L'équation différentielle devient $\dfrac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = g - \dfrac{k}{m}\,v_n^2$, soit

$$v_{n+1} = v_n + g\,\Delta t - \frac{k\,\Delta t}{m}\,v_n^2$$

Par identification : $A = g\,\Delta t = 9{,}8 \times 0{,}5 = 4{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $B = \dfrac{k\,\Delta t}{m} = \dfrac{0{,}78 \times 0{,}5}{200} = 1{,}95 \times 10^{-3}\ \mathrm{s \cdot m^{-1}}$.

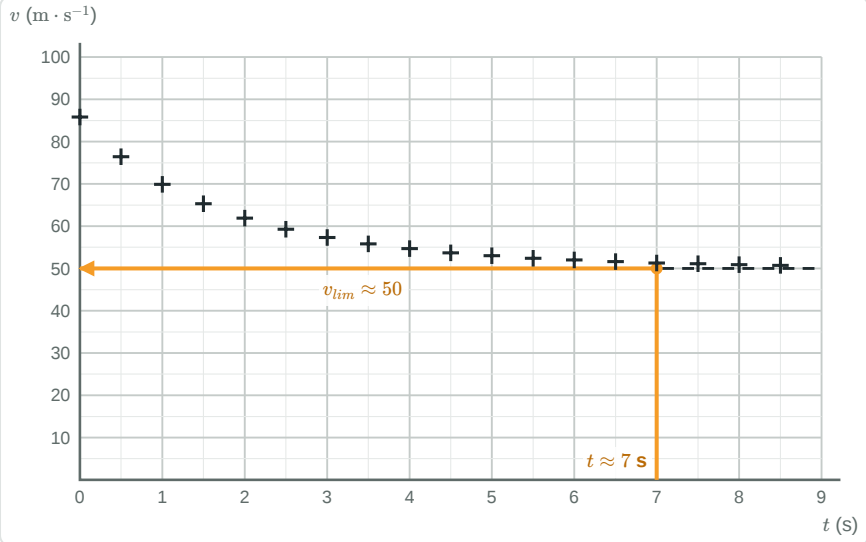
A s'ajoute à une vitesse : il est en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. $B\,v_n^2$ est aussi une vitesse, donc B est en $\mathrm{s \cdot m^{-1}}$.

b) Sur la figure 1, la vitesse ne varie pratiquement plus au bout d'environ 7 s : l'ordre de grandeur de la durée est de quelques secondes. Le palier se situe à $v_{lim} \approx 50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, soit $50 \times 3{,}6 = 180\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

$A = 4{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $B = 1{,}95 \times 10^{-3}\ \mathrm{s \cdot m^{-1}}$; $v_{lim} \approx 50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 1{,}8 \times 10^2\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, atteinte en 7 s environ : c'est la vitesse de $180\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ annoncée par le film à l'ouverture du parachute.

PIÈGE
Le graphique est gradué en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ alors que la réponse est demandée en $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$: il faut multiplier par 3,6. Ici la vitesse décroît vers sa limite, car le sauteur arrive plus vite ($309\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$).

COMPRENDRE
À la vitesse limite, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$: le frottement compense le poids, d'où $v_{lim} = \sqrt{\dfrac{m\,g}{k}} = 50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Le calcul confirme la lecture graphique.



3 · Figure 1 du sujet (points calculés par la méthode d'Euler), avec la lecture de la vitesse limite

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$9.8 \times 0.5 \approx 4.9$

$\frac{0.78 \times 0.5}{200} \approx 0.00195$

$50 \times 3.6 \approx 180$

$\sqrt{\frac{200 \times 9.8}{0.78}} \approx 50.12804$