# Enquête sur un homicide

Bac S 2004 Liban (ancien programme) · Exercice 2 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

**1** Partie I. Écrire l'équation de la réaction nucléaire de formation du carbone 14 dans la haute atmosphère. Identifier la particule émise. Justifier.

On note ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ la particule émise :

$$ {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + {}^{A}_{Z}\mathrm{X} $$

Conservation du nombre de nucléons : $14 + 1 = 14 + A$, donc $A = 1$.

Conservation de la charge électrique : $7 + 0 = 6 + Z$, donc $Z = 1$.

$Z = 1$ est l'élément hydrogène : la particule est un noyau ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$, c'est-à-dire un proton.

${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$ : la particule émise est un **proton**.

**PIÈGE**
« Justifier » : écrire la particule sans citer les deux lois de conservation fait perdre une partie des points.

**MÉTHODE**
Toute équation nucléaire s'équilibre avec deux bilans séparés : la somme des nombres du haut ($A$, nucléons) et la somme des nombres du bas ($Z$, charges) sont les mêmes de chaque côté de la flèche.

**2** Partie I. Écrire l'équation de la désintégration $\beta^-$ du carbone 14.

Une désintégration $\beta^-$ émet un électron ${}^{0}_{-1}\mathrm{e}$. Le noyau fils ${}^{A}_{Z}\mathrm{Y}$ vérifie $14 = A + 0$ et $6 = Z - 1$, donc $A = 14$ et $Z = 7$ : c'est de l'azote.

${}^{14}_{6}\mathrm{C} \longrightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$

**PIÈGE**
Écrire l'électron ${}^{0}_{1}\mathrm{e}$ : avec une charge $+1$, c'est un positon, donc une désintégration $\beta^+$, et le noyau fils serait du bore.

**COMPRENDRE**
Dans le noyau, un neutron se transforme en proton : $Z$ augmente de 1 et $A$ ne change pas. Un antineutrino est émis en même temps ; il n'était pas exigé dans cette équation.

**3** Partie I. Le temps de demi-vie du carbone 14 est de 5570 ans. Qu'appelle-t-on temps de demi-vie ?

Le temps de demi-vie $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle la **moitié** des noyaux radioactifs présents au départ dans l'échantillon se sont désintégrés : $N(t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$.

**COMPRENDRE**
Cette durée ne dépend ni de l'instant choisi comme origine ni de la quantité de noyaux : quel que soit le moment, il faut attendre $t_{1/2}$ pour que la population soit divisée par deux.

**4** Partie I. a) Exprimer en fonction de $N_0$ le nombre $N$ de noyaux restant aux instants $t_{1/2}$, $2\,t_{1/2}$, $3\,t_{1/2}$, $4\,t_{1/2}$ et $5\,t_{1/2}$. b) Reporter ces points sur un graphique et tracer l'allure de la courbe $N(t)$.

**Données utiles** échelle : 2 cm pour $t_{1/2}$ en abscisse ; 10 cm pour $N_0$ en ordonnée

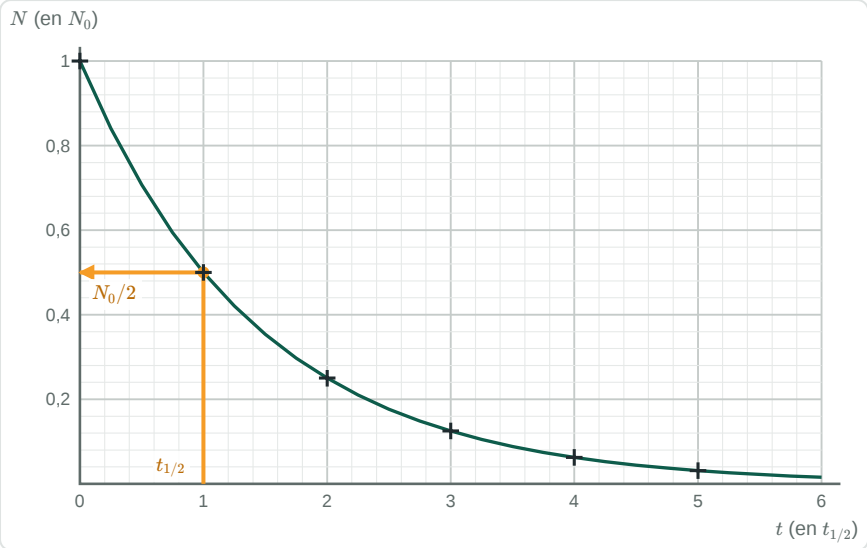
**a)** À chaque demi-vie écoulée, le nombre de noyaux est divisé par 2 : $N(n\,t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2^n}$.

$N(t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$ ; $N(2\,t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{4}$ ; $N(3\,t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{8}$ ; $N(4\,t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{16}$ ; $N(5\,t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{32}$.

**b)** Ordonnées à l'échelle : 5,0 cm ; 2,5 cm ; 1,3 cm ; 0,6 cm ; 0,3 cm, aux abscisses 2, 4, 6, 8 et 10 cm. On place aussi le point de départ $(0\ ;\ N_0)$, puis on trace à main levée une courbe régulière passant par ces six points.

$N(n\,t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2^n}$ ; la courbe est une exponentielle décroissante qui tend vers 0.

**PIÈGE**
Relier les points à la règle, ou faire toucher l'axe des abscisses à la courbe. Elle s'en approche sans jamais l'atteindre.




**4** · Nombre de noyaux de carbone 14 en fonction du temps

**5** Partie I. La courbe a pour équation $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ (1). a) Établir la relation entre le temps de demi-vie et la constante radioactive $\lambda$. b) Calculer la valeur de $\lambda$.

**Données utiles** $t_{1/2} = 5570$ ans

**a)** Par définition, $N(t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$. Avec la relation (1) :

$$N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{N_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\lambda\, t_{1/2} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

donc $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

**b)** $\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}} = \dfrac{\ln 2}{5570} = 1{,}24 \times 10^{-4}\ \mathrm{an}^{-1}$.

En secondes : $t_{1/2} = 5570 \times 365{,}25 \times 24 \times 3600 = 1{,}758 \times 10^{11}$ s,

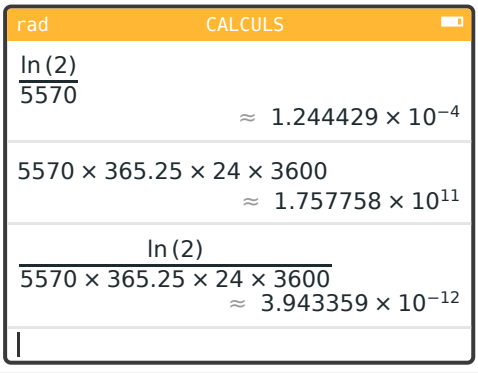
donc $\lambda = \dfrac{\ln 2}{1{,}758 \times 10^{11}} = 3{,}94 \times 10^{-12}\ \mathrm{s}^{-1}$.

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}\ ;\ \lambda = 1{,}24 \times 10^{-4}\ \mathrm{an}^{-1} = 3{,}94 \times 10^{-12}\ \mathrm{s}^{-1}$$

**PIÈGE**
Oublier le signe : $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$. Une constante radioactive négative doit alerter.

**COMPRENDRE**
Trois chiffres significatifs suffisent, comme pour les rapports $N/N_0$ du tableau. $\lambda$ est l'inverse d'un temps : son unité dépend de celle de $t_{1/2}$. Les deux valeurs servent : par an pour dater, par seconde pour une activité en becquerels.

**À LA CALCULATRICE**



**1** Partie II. a) Établir l'équation différentielle vérifiée par le nombre de noyaux $N(t)$. b) Vérifier que l'expression (1) de $N(t)$ est solution de cette équation différentielle.

**Données utiles** $A(t) = -\dfrac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}$ ; $A(t) = \lambda\, N(t)$

**a)** On égale les deux expressions de l'activité : $-\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda\, N$, soit

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + \lambda\, N = 0$$

**b)** On dérive $N(t) = N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$ : $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda\, N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

On reporte dans le membre de gauche : $-\lambda\, N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t} + \lambda\, N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0$.

$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + \lambda\, N = 0$ ; l'égalité est vraie à tout instant, la relation (1) est bien solution.

**COMPRENDRE**
Le signe « $-$ » de la définition de l'activité vient de ce que $N$ diminue : $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ est négatif alors qu'une activité est positive.

**MÉTHODE**
Vérifier qu'une fonction est solution : 1) la dériver ; 2) remplacer la fonction et sa dérivée dans l'équation ; 3) constater que l'égalité est vraie quel que soit $t$.

**2** Partie II. a) Calculer l'âge des ossements d'ANDER. b) Les données de l'agence de presse sont-elles en accord avec ce résultat ? c) À l'aide de la dernière ligne du tableau : SAPIAND a-t-il pu massacrer ANDER ?

**Données utiles** ANDER : $\dfrac{N}{N_0} = 1{,}64 \times 10^{-2}$ ; SAPIAND : $\dfrac{N}{N_0} = 1{,}87 \times 10^{-2}$ ; $t_{1/2} = 5570$ ans ; cohabitation des deux espèces entre $-60\,000$ ans et $-30\,000$ ans

**a)** D'après (1), $\dfrac{N}{N_0} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$, donc $\ln\dfrac{N}{N_0} = -\lambda\, t$ et, avec $\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$ :

$$t = -\frac{t_{1/2}}{\ln 2}\ln\frac{N}{N_0}$$

ANDER : $t_A = -\dfrac{5570}{\ln 2} \times \ln(1{,}64 \times 10^{-2}) = 3{,}30 \times 10^4$ ans.

**b)** ANDER est mort il y a environ 33 000 ans. Cette date est comprise entre $-60\,000$ ans et $-30\,000$ ans, période où les deux espèces ont cohabité : l'article est en accord avec ce résultat.

**c)** SAPIAND : $t_S = -\dfrac{5570}{\ln 2} \times \ln(1{,}87 \times 10^{-2}) = 3{,}20 \times 10^4$ ans.

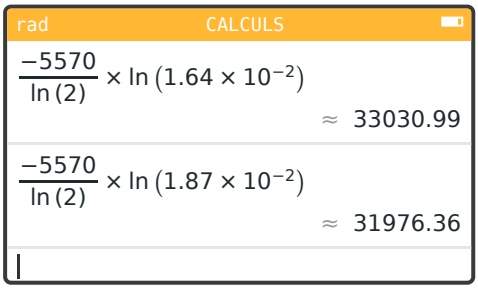
SAPIAND est mort environ 1 000 ans après ANDER. Une vie humaine est bien plus courte : il n'était pas né à la mort d'ANDER.

$t_A = 3{,}30 \times 10^4$ ans et $t_S = 3{,}20 \times 10^4$ ans : les deux individus ne se sont pas rencontrés, SAPIAND n'a pas pu massacrer ANDER.

**PIÈGE**
Garder $\lambda$ en $\mathrm{s}^{-1}$ : l'âge sortirait en secondes. Avec $t_{1/2}$ en années, le résultat est directement en années.

**COMPRENDRE**
Plus le rapport $N/N_0$ est petit, plus la mort est ancienne : ANDER ($1{,}64 \times 10^{-2}$) est donc mort avant SAPIAND ($1{,}87 \times 10^{-2}$). Le rapport vaut environ $\dfrac{1}{64}$, soit près de six demi-vies.

**À LA CALCULATRICE**



**3** Partie II. Pour 1 g de carbone récent, soit 200 g d'os, on compte une quinzaine de désintégrations par minute. a) Quelle est, en becquerels, l'activité de ces 200 g d'os ? b) Quel est le nombre de noyaux radioactifs présents ? c) Quel est le rapport $N(^{14}\text{C})/N(^{12}\text{C})$ dans cet échantillon ?

**Données utiles** $M(\text{C}) = 12{,}0\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ; $N_A = 6{,}02\times10^{23}\ \text{mol}^{-1}$ ; $\lambda = 3{,}94\times10^{-12}\ \text{s}^{-1}$ (partie I, Q5) ; masse de carbone $m = 1$ g

**a)** Un becquerel correspond à une désintégration par seconde : $A = \dfrac{15}{60} = 0{,}25$ Bq.

**b)** $A = \lambda N$, donc $N = \dfrac{A}{\lambda}$, avec $\lambda$ en $\text{s}^{-1}$ puisque $A$ est en becquerels :

$$N(^{14}\text{C}) = \frac{0{,}25}{3{,}94\times10^{-12}} = 6{,}3\times10^{10}\ \text{noyaux}$$

**c)** Le carbone est presque uniquement du carbone 12 : $N(^{12}\text{C}) = \dfrac{m}{M(\text{C})}\times N_A = \dfrac{1}{12{,}0}\times 6{,}02\times10^{23} = 5{,}0\times10^{22}$ noyaux.

$$\frac{N(^{14}\text{C})}{N(^{12}\text{C})} = \frac{6{,}3\times10^{10}}{5{,}0\times10^{22}} = 1{,}3\times10^{-12}$$

$$A = 0{,}25\ \text{Bq}\ ;\ N(^{14}\text{C}) = 6{,}3\times10^{10}\ ;\ \frac{N(^{14}\text{C})}{N(^{12}\text{C})} = 1{,}3\times10^{-12}$$

**PIÈGE**

Diviser l'activité par $\lambda$ en $\text{an}^{-1}$ : le becquerel impose la seconde. Autre erreur : prendre 200 g pour la masse de carbone, alors que ces os n'en contiennent que 1 g.

**COMPRENDRE**

« Une quinzaine » est une valeur approchée : deux chiffres significatifs au plus. Il y a environ un atome de carbone 14 pour mille milliards d'atomes de carbone 12, d'où la masse d'os nécessaire.

**À LA CALCULATRICE**

