Mécanique du vol d'un ballon sonde

Bac S 2004 Métropole (ancien programme) · Exercice 4 **6,5 points** **Durée conseillée 1 h 18**

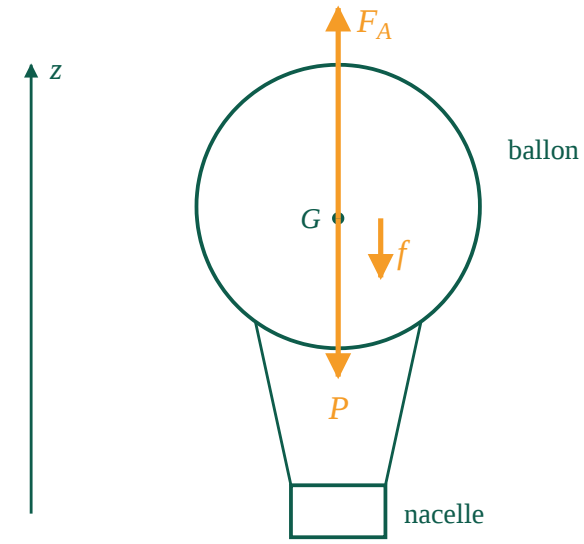
1.1.1 Établir le bilan des forces exercées sur le système {ballon + nacelle} juste après le décollage, en indiquant la direction et le sens de chaque force.

Système {ballon + nacelle}, référentiel terrestre supposé galiléen.
Trois forces, toutes de direction verticale :

- le poids $\vec{P}$, vers le bas ;
- la poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_A}$ exercée par l'air, vers le haut ;
- la force de frottement de l'air $\vec{f}$, opposée au mouvement : le ballon monte, elle est donc vers le bas.

$\vec{P}$ (vertical, vers le bas), $\overrightarrow{F_A}$ (verticale, vers le haut), $\vec{f}$ (verticale, vers le bas)

PIÈGE
Orienter $\vec{f}$ vers le haut. Un frottement s'oppose toujours à la vitesse : pour un ballon qui monte, il est dirigé vers le bas, comme le poids.



1.1.1 · Forces sur le système juste après le décollage (le frottement est encore très faible)

1.1.2 Donner l'expression littérale de la valeur F_A de la poussée d'Archimède.

La poussée d'Archimède a pour valeur le poids du volume d'air déplacé, ici le volume V_b du ballon (celui de la nacelle est négligé) :

$$F_A = \rho V_b g$$

PIÈGE
Utiliser la masse volumique de l'hélium. ρ est celle du fluide déplacé, donc de l'air qui entoure le ballon.

1.1.3 Appliquer au système, de masse M, la seconde loi de Newton (relation vectorielle seulement).

Dans le référentiel terrestre galiléen, pour le système de masse M constante :

$$\vec{P} + \overrightarrow{F_A} + \vec{f} = M\,\vec{a}$$

1.1.4 La vitesse initiale étant nulle, quelle condition le vecteur accélération doit-il vérifier pour que le ballon s'élève ? En déduire une condition sur M.

Le ballon part sans vitesse : il ne s'élève que si $\vec{a}$ est vertical et dirigé vers le haut, soit $a_z > 0$ sur l'axe (Oz) orienté vers le haut.

Projection de la relation de 1.1.3 sur (Oz) : $-Mg + \rho V_b g - K\rho v^2 = Ma_z$.

Au décollage $v = 0$, donc $f = 0$: $\quad Ma_z = (\rho V_b - M)\, g > 0$

$$\boxed{M < \rho\, V_b}$$

COMPRENDRE
ρV_b est la masse d'air déplacé. Le ballon décolle si le système est plus léger que l'air dont il prend la place.

MÉTHODE
Projeter : une force dirigée dans le sens de l'axe compte positivement, une force de sens contraire négativement. Ici $+F_A$, $-P$, $-f$.

1.1.5 En déduire la masse maximale de matériel scientifique que l'on peut embarquer dans la nacelle.

Données utiles $\rho = 1{,}22\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $V_b = 9{,}0\ \text{m}^3$; $m = 2{,}10$ kg ; $m' = 0{,}50$ kg

En notant m_s la masse de matériel : $M = m + m' + m_s$.

La condition $M < \rho V_b$ (1.1.4) donne $m_s < \rho V_b - m - m'$.

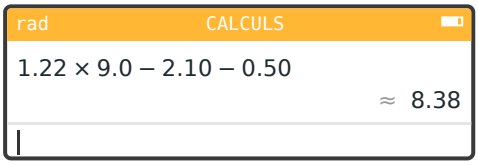
$$m_{s,\max} = 1{,}22 \times 9{,}0 - 2{,}10 - 0{,}50 = 8{,}4\ \text{kg}$$

$$\boxed{m_{s,\max} \approx 8{,}4\ \text{kg} \text{ (le matériel doit rester en dessous de cette masse)}}$$

PIÈGE
Oublier la masse de la nacelle vide, ou celle du ballon : M est la masse de tout le système.

COMPRENDRE
V_b n'a que deux chiffres significatifs : $\rho V_b \approx 11$ kg n'est connu qu'au dixième de kilogramme au mieux. On arrondit donc $8{,}38$ à $8{,}4$ kg.

À LA CALCULATRICE



1.2.1 Montrer que l'équation différentielle du mouvement se met sous la forme $A\,v^2 + B = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ et donner les expressions de A et B.

Projection sur (Oz) de la relation de 1.1.3, avec $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$:

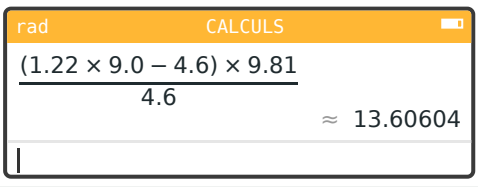
$$-Mg + \rho V_b g - K\rho v^2 = M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

En divisant par M : $\quad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{K\rho}{M}\,v^2 + \dfrac{(\rho V_b - M)\,g}{M}$

$$\boxed{A = -\frac{K\rho}{M} \text{ et } B = \frac{(\rho V_b - M)\,g}{M}}$$

COMPRENDRE
A est négatif (le frottement freine) et B positif : c'est l'accélération à $t = 0$, quand $v = 0$. Avec $M = 4{,}6$ kg, on retrouve bien $B = 13{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

À LA CALCULATRICE



1.2.2 Par la méthode d'Euler, avec un pas $\Delta t = 0{,}05$ s, recopier et compléter le tableau donnant v, a et Δv aux dates t_0, t_1 et t_2.

Données utiles $A = -0{,}53\ \text{m}^{-1}$; $B = 13{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $v(t_0) = 0$; $a(t_0) = 13{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

À chaque date : $a(t_n) = A\,v(t_n)^2 + B$, puis $\Delta v(t_n) = a(t_n)\,\Delta t$ et $v(t_{n+1}) = v(t_n) + \Delta v(t_n)$.

- $\Delta v(t_0) = 13{,}6 \times 0{,}05 = 0{,}68\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, donc $v_1 = 0 + 0{,}68 = 0{,}68\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$;
- $a(t_1) = -0{,}53 \times 0{,}68^2 + 13{,}6 = 13{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$;
- $\Delta v(t_1) = 13{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}67\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, donc $v_2 = 0{,}68 + 0{,}67 = 1{,}35\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

t (s)	$v(t_n)$ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	$a(t_n)$ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)	$\Delta v(t_n)$ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
$t_0 = 0{,}0$	0	13,6	0,68
$t_1 = 0{,}05$	0,68	13,4	0,67
$t_2 = 0{,}10$	1,35		

$v_1 = 0{,}68\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $v_2 = 1{,}35\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

PIÈGE
Garder $a = 13{,}6$ pour le deuxième pas. L'accélération se recalcule à chaque date avec la nouvelle vitesse, et il faut penser au carré de v.

MÉTHODE
Euler, ligne par ligne : la vitesse donne l'accélération (équation différentielle), l'accélération donne Δv, et Δv donne la vitesse de la ligne suivante.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

13.6 × 0.05 ≈ 0.68

(−0.53) × 0.68² + 13.6 ≈ 13.35493

13.4 × 0.05 ≈ 0.67

0.68 + 0.67 ≈ 1.35

1.3.1 Donner l'expression littérale de la vitesse limite v_ℓ du ballon en fonction de A et B.

Quand la vitesse limite est atteinte, v ne varie plus : $\dfrac{dv}{dt} = 0$, donc $A\,v_\ell^2 + B = 0$.

$$v_\ell = \sqrt{-\frac{B}{A}}$$

COMPRENDRE
A est négatif, donc $-\dfrac{B}{A}$ est positif : la racine existe. Physiquement, le poids et le frottement compensent alors exactement la poussée d'Archimède.

1.3.2 Calculer cette vitesse limite.

Données utiles $A = -0{,}53\ \text{m}^{-1}$; $B = 13{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

$$v_\ell = \sqrt{-\frac{13{,}6}{-0{,}53}} = 5{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$v_\ell = 5{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme A, la donnée la moins précise.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\sqrt{\frac{13.6}{0.53}}$ ≈ 5.065607

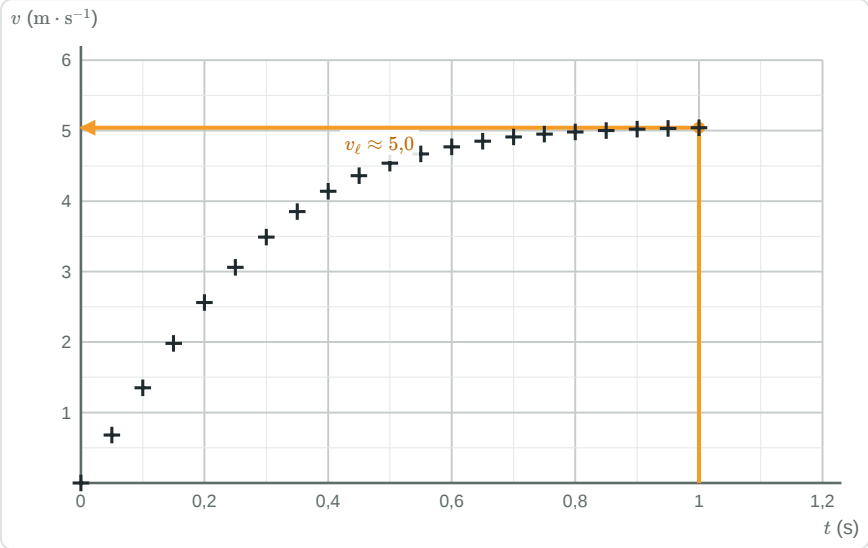
1.3.3 Comparer la vitesse limite calculée à la valeur lue sur le graphique obtenu par la méthode d'Euler.

Données utiles $v_\ell = 5{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (1.3.2)

Sur le graphique, les points se stabilisent à partir de $t \approx 0{,}9$ s sur un palier horizontal situé juste au-dessus de la graduation 5 : $v_\ell \approx 5{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

La lecture graphique ($\approx 5{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) est très proche de la valeur calculée ($5{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) : les deux résultats sont cohérents.

COMPRENDRE
La vitesse limite se lit sur l'asymptote horizontale de la courbe. À $t = 1$ s le ballon n'y est pas tout à fait : la lecture donne une valeur un peu inférieure au calcul.



1.3.3 · Graphique du sujet (méthode d'Euler), avec la lecture du palier

2.1 En calculant l'écart relatif $\dfrac{\Delta g}{g}$ entre les altitudes 0 m et 9000 m, montrer que l'accélération de la pesanteur peut être considérée comme constante à moins de 1 % près.

Données utiles $g_0 = 9{,}8066\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $g_{9000} = 9{,}7789\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

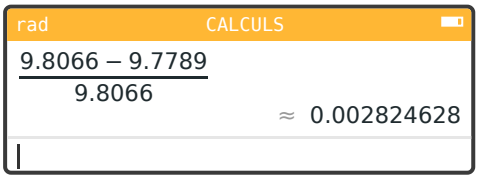
$$\frac{\Delta g}{g} = \left|\frac{g_{9000} - g_0}{g_0}\right| = \frac{|9{,}7789 - 9{,}8066|}{9{,}8066} = 2{,}8 \times 10^{-3}$$

g décroît régulièrement avec l'altitude : l'écart est le plus grand entre les deux valeurs extrêmes du tableau.

$\dfrac{\Delta g}{g} = 0{,}28\ \% < 1\ \%$: g peut être considérée comme constante entre 0 et 9000 m.

PIÈGE
Oublier la valeur absolue (résultat négatif) ou le passage en pourcentage : $2{,}8 \times 10^{-3}$, c'est $0{,}28\ \%$ et non $2{,}8\ \%$.

À LA CALCULATRICE



2.2 En considérant qualitativement l'évolution avec l'altitude de chaque paramètre de la poussée d'Archimède, choisir et justifier la bonne conclusion : F_A augmente, reste constante, diminue, ou on ne peut pas conclure.

$F_A = \rho V_b g$. Quand l'altitude augmente :

- g reste pratiquement constante (2.1) ;
- ρ diminue (tableau : de $1{,}22$ à $0{,}46\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$) ;
- V_b augmente (phrase soulignée : le ballon grossit en montant).

Le produit ρV_b réunit un facteur qui diminue et un facteur qui augmente : sans connaître les valeurs de V_b, son sens de variation reste indéterminé.

Proposition **d** : on ne peut pas conclure.

PIÈGE
Répondre « F_A diminue » en ne regardant que la ligne ρ du tableau. Le volume du ballon n'est constant qu'à faible altitude (partie 1).