Energies d'un système solide-ressort

Bac S 2004 Asie (ancien programme) · Exercice 4 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1 (Partie I, sans frottement, 1.a et 1.b) Faire l'inventaire des forces exercées sur le mobile, puis reproduire la figure 1 et représenter ces forces sans souci d'échelle.

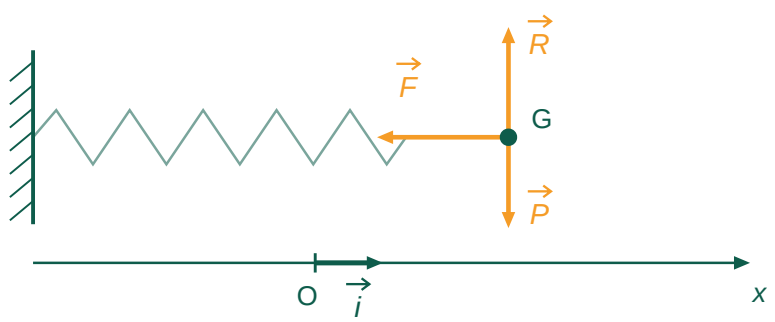
Système {mobile}, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Sans frottement, il subit trois forces, appliquées en G :

- son poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas ;
- la réaction $\vec{R}$ de la tige, perpendiculaire à la tige (pas de frottement), donc verticale, vers le haut ;
- la force de rappel $\vec{F}$ du ressort, horizontale, dirigée vers O : $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$.

Trois forces : $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$ (voir la figure).

PIÈGE
Dessiner $\vec{F}$ dans le sens du déplacement. La force de rappel ramène toujours G vers O : elle est opposée à l'allongement, d'où le signe « $-$ ».

COMPRENDRE
L'oscillateur solide-ressort ne figure plus au programme actuel de spécialité. Les outils employés ici (deuxième loi de Newton, énergies cinétique et mécanique, travail des frottements) restent, eux, exigibles.



1 · Figure 1 reproduite, mobile écarté du côté des x positifs : les trois forces (en orange), sans souci d'échelle

2 (Partie I) En appliquant la seconde loi de Newton au mobile, établir l'équation différentielle du mouvement.

Seconde loi de Newton, la masse étant constante : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}$.

Projection sur l'axe (Ox) : $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont verticaux, leurs composantes sont nulles. Il reste $-k\,x = m\,a_x$ avec $a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement : système, référentiel, bilan des forces, loi de Newton écrite en vecteurs, puis projection sur l'axe du mouvement. L'équation différentielle apparaît en remplaçant a_x par la dérivée seconde de x.

3 (Partie I) Vérifier que $x = x_M \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right)$ est solution de cette équation différentielle quelles que soient les constantes x_M et φ.

On dérive deux fois par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x_M\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -x_M\,\frac{k}{m}\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right) = -\frac{k}{m}\,x$$

$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,x = -\frac{k}{m}\,x + \frac{k}{m}\,x = 0$ à tout instant, pour tous x_M et φ : la fonction proposée est solution.

PIÈGE
Oublier le facteur $\sqrt{k/m}$ qui sort à chaque dérivation : la dérivée de $\cos(\omega t + \varphi)$ est $-\omega\sin(\omega t + \varphi)$. Deux dérivations donnent $\omega^2 = k/m$.

4 (Partie I) Le mobile est lâché à $t = 0$ sans vitesse initiale depuis la position x_0, avec $x_M > 0$. Déterminer numériquement x_M et φ.

Données utiles $x_0 = +2{,}0$ cm ; $v(0) = 0$

Vitesse initiale nulle : $v_x(0) = -x_M\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin\varphi = 0$. Comme $x_M \neq 0$, $\sin\varphi = 0$, soit $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$.

Position initiale : $x(0) = x_M\cos\varphi = x_0 > 0$. Avec $x_M > 0$, il faut $\cos\varphi > 0$: on retient $\varphi = 0$, d'où $x_M = x_0$.

$x_M = 2{,}0$ cm et $\varphi = 0$ rad

MÉTHODE
Deux constantes inconnues, donc deux conditions initiales : la vitesse à $t = 0$ fixe φ, la position à $t = 0$ fixe x_M. Les conditions de signe ($x_M > 0$, $x_0 > 0$) départagent les valeurs possibles de φ.

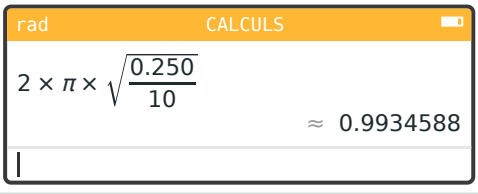
5 (Partie I) Calculer la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ du mouvement.

Données utiles $m = 250$ g $= 0{,}250$ kg ; $k = 10$ N · m^{-1}

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}250}{10}}$$

$T_0 = 0{,}99$ s

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Laisser la masse en grammes : avec $m = 250$ on trouverait 31 s. Dans cette formule, m est en kg et k en N · m^{-1}.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme $k = 10$ N · m^{-1}, la donnée la moins précise. La période propre ne dépend pas de l'amplitude x_M.

1 (Partie II, avec frottement) À l'aide de la figure 2, déterminer la pseudo-période T du mouvement. Comparer sa valeur à celle de la période propre.

Données utiles figure 2 ; $T_0 = 0{,}99$ s (I.5)

Sur la figure 2, x est maximale à $t = 0$, puis à $t = 1{,}0$ s et à $t = 2{,}0$ s. Deux pseudo-périodes durent donc 2,0 s :

$$T = \frac{2{,}0}{2} = 1{,}0\text{ s}$$

$T = 1{,}0$ s $\approx T_0$: à la précision de la lecture, la pseudo-période est égale à la période propre.

MÉTHODE
Mesurer la durée de plusieurs pseudo-périodes entre deux maximums (ou deux passages par zéro dans le même sens), puis diviser : l'incertitude de lecture est divisée d'autant.

2 (Partie II) Identifier par leur lettre (A ou B) les courbes $E_c(t)$ et $E_p(t)$ de la figure 3 en justifiant.

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$ et $E_p = \frac{1}{2} k x^2$.

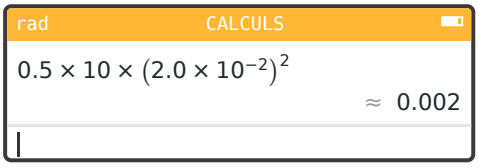
À $t = 0$, le mobile est lâché sans vitesse : $E_c(0) = 0$. Il est alors à son abscisse maximale x_0 : E_p est maximale et vaut E_m, soit $\frac{1}{2} \times 10 \times (2{,}0 \times 10^{-2})^2 = 2{,}0 \times 10^{-3}$ J $= 2{,}0$ mJ.

La courbe A part de $2{,}0$ mJ, la courbe B part de zéro.

Courbe A : $E_p(t)$; courbe B : $E_c(t)$.

COMPRENDRE
Les deux énergies s'échangent : quand l'une est maximale, l'autre est nulle. Elles s'annulent deux fois par pseudo-période, car elles dépendent de x^2 et de v^2.

À LA CALCULATRICE



3 (Partie II) Pourquoi l'énergie mécanique du système diminue-t-elle au cours du temps ?

La force de frottement $\vec{f} = -\mu \vec{v}$ est toujours opposée au mouvement : son travail est négatif (résistant). Cette force n'est pas conservative, et la variation de l'énergie mécanique est égale à son travail.

E_m diminue : les frottements dissipent peu à peu l'énergie mécanique du système, transférée au milieu extérieur sous forme thermique.

PIÈGE
Répondre « à cause des frottements » sans plus : il faut dire que leur travail est résistant et que l'énergie perdue est dissipée sous forme thermique.

4 (Partie II) En utilisant la figure 2 et en justifiant, indiquer auquel des instants t_1 et t_2 la valeur de la vitesse du mobile est : a) maximale ; b) nulle.

La vitesse est $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$: c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $x(t)$, et la valeur de la vitesse est $v = |v_x|$.

a) À t_1, la courbe coupe l'axe des temps ($x = 0$) et sa tangente est la plus inclinée : $|v_x|$ est maximale.

b) À t_2, x passe par un minimum : la tangente est horizontale, $v_x = 0$.

a) vitesse maximale à t_1 ; b) vitesse nulle à t_2.

PIÈGE
À t_1, la pente est négative : v_x est minimale, mais c'est la valeur $v = |v_x|$ qui est demandée, et elle est maximale. À ne pas confondre non plus avec $x = 0$, qui n'implique pas $v = 0$.

5 (Partie II) Que peut-on en conclure quant à la valeur de la force de frottement à chacun de ces instants ?

$\vec{f} = -\mu \vec{v}$ donne, en valeur, $f = \mu v$: la force de frottement est proportionnelle à la vitesse.

À t_1, v est maximale donc f est maximale ; à t_2, $v = 0$ donc $f = 0$.

6 (Partie II) Justifier alors la forme « en escalier » de la courbe $E_m(t)$ de la figure 3.

L'énergie mécanique ne diminue que par le travail de $\vec{f}$, d'autant plus important, pendant une même durée, que f et v sont grandes.

Autour de t_2 (et à chaque extremum de x), $v \approx 0$: f est nulle et ne travaille pas, E_m reste pratiquement constante. C'est un palier.

Autour de t_1 (et à chaque passage par O), v et f sont maximales : E_m diminue le plus vite. C'est une « marche ».

Paliers quand $v = 0$ (aucune dissipation), descentes rapides quand v est maximale : $E_m(t)$ décroît en escalier, deux marches par pseudo-période.

COMPRENDRE

La puissance de la force de frottement vaut $\vec{f} \cdot \vec{v} = -\mu v^2$: c'est la pente de la courbe $E_m(t)$. Elle est nulle quand $v = 0$ et la plus négative quand v est maximale.