Détermination de la viscosité d'une huile moteur

Bac S 2004 Antilles-Guyane rattrapage (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

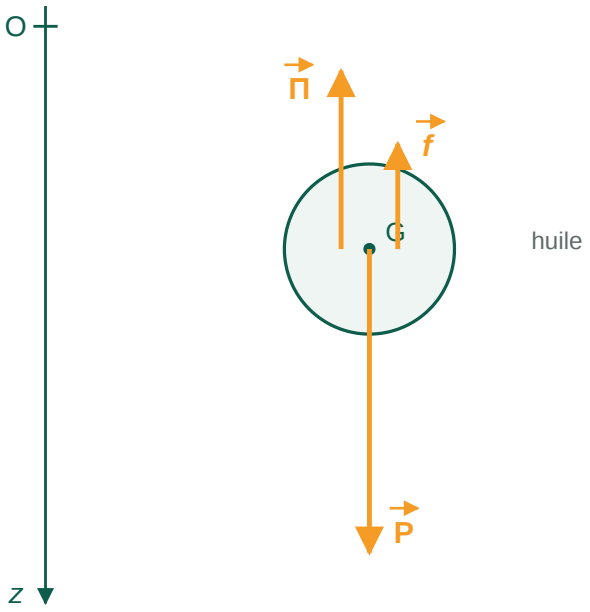
1.1 Faire l'inventaire des forces extérieures appliquées à la balle en chute verticale dans l'huile, puis les représenter sur un schéma.

Système {balle}, étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Trois forces verticales s'exercent sur la balle :

- le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$, vers le bas, de valeur $P = m\,g$;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$, vers le haut, de valeur $\Pi = \rho_{\text{huile}}\,V\,g$ (poids du volume d'huile déplacé) ;
- la force de frottement $\vec{f} = -k\,\vec{v}_G$, opposée à la vitesse donc vers le haut, de valeur $f = k\,v_G$.

Trois forces : poids $\vec{P}$ (vers le bas), poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ et frottement $\vec{f}$ (vers le haut).

PIÈGE
Oublier la poussée d'Archimède. Dans l'huile elle vaut $\rho_{\text{huile}}\,V\,g \approx 0{,}30$ N, soit 87 % du poids : elle n'est pas du tout négligeable, contrairement à une chute dans l'air.



1.1 · Les trois forces s'appliquent en G ; $\vec{\Pi}$ et $\vec{f}$ sont décalées pour la lisibilité (schéma sans échelle)

1.2 En appliquant la deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle du mouvement de la balle dans le référentiel du laboratoire.

Deuxième loi de Newton appliquée à la balle, de masse constante : $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$.

Projection sur l'axe Oz orienté vers le bas, avec $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}$:

$$m\,g - \rho_{\text{huile}}\,V\,g - k\,v_G = m\,\frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{m\,\frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t} = m\,g - \rho_{\text{huile}}\,V\,g - k\,v_G}$$

PIÈGE
L'axe pointe vers le bas : le poids est compté positivement, la poussée d'Archimède et le frottement négativement. Une erreur de signe ici fausse toute la suite.

MÉTHODE
Chute dans un fluide : 1) système et référentiel ; 2) bilan des forces ; 3) deuxième loi de Newton en vecteurs ; 4) projection sur l'axe, en regardant le sens de chaque force par rapport à celui de l'axe.

1.3 Montrer que $\frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}$ peut se mettre sous la forme $\frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t} = A - B\,v_G$, avec $A = g\left(1 - \frac{\rho_{\text{huile}}\,V}{m}\right)$ et $B = \frac{k}{m}$.

On divise l'équation de la question 1.2 par m :

$$\frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\rho_{\text{huile}}\,V\,g}{m} - \frac{k}{m}\,v_G$$

puis on met g en facteur dans les deux premiers termes :

$$\frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t} = g\left(1 - \frac{\rho_{\text{huile}}\,V}{m}\right) - \frac{k}{m}\,v_G$$

$\frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t} = A - B\,v_G$ avec $A = g\left(1 - \frac{\rho_{\text{huile}}\,V}{m}\right)$ et $B = \frac{k}{m}$

1.4 Vérifier que la constante A vaut 1,27 S.I. en précisant son unité.

Données utiles $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $\rho_{\text{huile}} = 0{,}910\ \text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$; $V = 33{,}5\ \text{cm}^3$; $m = 35{,}0\ \text{g}$

Le rapport $\frac{\rho_{\text{huile}}\,V}{m}$ est sans unité : $\rho_{\text{huile}}\,V = 0{,}910 \times 33{,}5 = 30{,}5$ g est une masse, divisée par la masse m en grammes.

$$A = 9{,}81 \times \left(1 - \frac{0{,}910 \times 33{,}5}{35{,}0}\right) = 1{,}27$$

La parenthèse étant sans unité, A a l'unité de g : c'est une accélération.

$A = 1{,}27\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, valeur conforme à celle de l'énoncé.

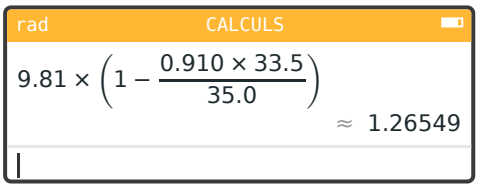
PIÈGE

Mélanger les unités dans le rapport : $\rho_{\text{huile}}\,V$ en grammes impose m en grammes. Avec $m = 35{,}0 \times 10^{-3}$ kg au dénominateur et le numérateur en grammes, le résultat est absurde (négatif).

COMPRENDRE

Les données ont trois chiffres significatifs, le résultat aussi : 1,26549 s'arrondit à 1,27. Autre façon de trouver l'unité : A s'ajoute à $\frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}$, donc s'exprime comme une accélération.

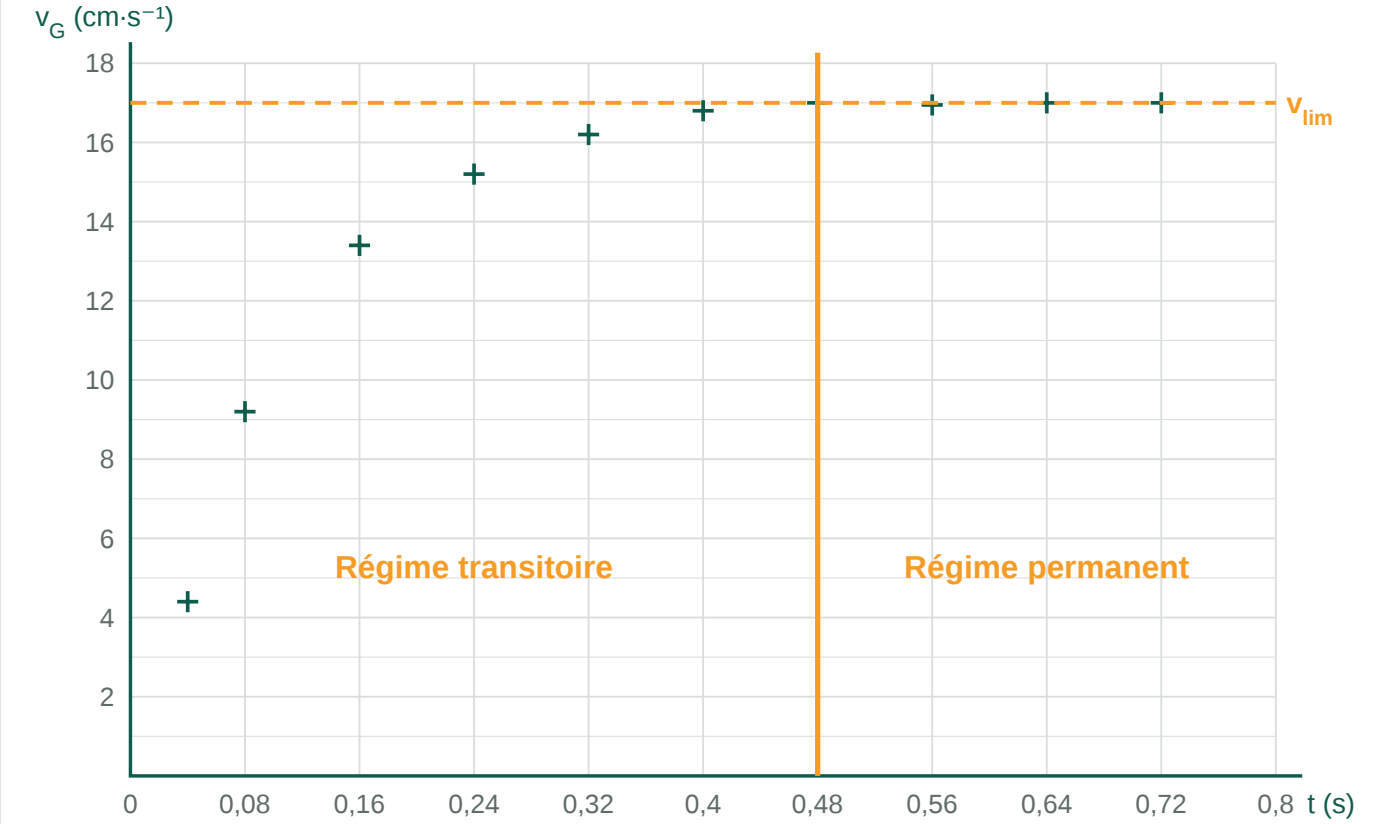
À LA CALCULATRICE



1.5.1 Séparer, sur le graphe de l'annexe 1, par un axe vertical les domaines des deux régimes ; préciser le domaine du régime permanent et celui du régime transitoire.

Tant que la vitesse augmente, le régime est transitoire. Lorsque la vitesse ne varie plus, le régime est permanent. Sur l'annexe, les points s'alignent sur un palier horizontal à partir de $t \approx 0{,}48$ s : on trace l'axe vertical à cette date.

Régime transitoire pour $t < 0{,}48$ s environ ; régime permanent au-delà.



1.5.1 · Annexe 1 complétée : séparation des deux régimes et vitesse limite

1.5.2 Relever la valeur de la vitesse limite v_{lim} sur la représentation graphique $v_G = f(t)$.

La vitesse limite est l'ordonnée du palier horizontal atteint par les points expérimentaux.

$$v_{\text{lim}} = 17 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} = 0{,}17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

PIÈGE

L'axe vertical de l'annexe est gradué en $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$, alors que le tableau de la méthode d'Euler est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Donner l'unité lue, et convertir avant toute comparaison.

1.5.3 Que vaut l'accélération de la balle quand celle-ci atteint la vitesse limite ?

Quand la vitesse limite est atteinte, v_G reste constante. L'accélération, dérivée de la vitesse par rapport au temps, est donc nulle.

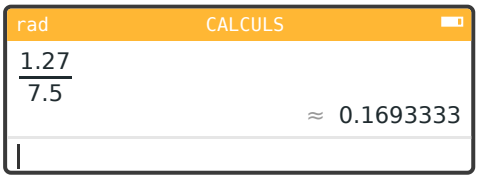
$$a_G = \frac{\text{d}v_G}{\text{d}t} = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

COMPRENDRE

Les forces se compensent alors : $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = \vec{0}$, le mouvement est rectiligne uniforme.

L'équation différentielle donne $v_{\text{lim}} = \frac{A}{B} = 0{,}17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, en accord avec la lecture graphique.

À LA CALCULATRICE



1.6.1 Quel est le pas d'itération de la méthode d'Euler proposée ?

Le pas est la durée qui sépare deux dates consécutives du tableau : $\Delta t = 0{,}080 - 0 = 0{,}16 - 0{,}080$.

$$\Delta t = 0{,}080 \text{ s}$$

1.6.2 Que vaut l'accélération à l'instant $t = 0$ s ?

Données utiles $A = 1{,}27\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (1.4) ; $v_G(0) = 0$ (tableau)

À $t = 0$ s, la vitesse est nulle, donc $\dfrac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}(0) = A - B \times 0 = A$.

$$\frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}(0) = A = 1{,}27\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

COMPRENDRE
L'accélération initiale est très inférieure à g : dès le départ, la poussée d'Archimède compense l'essentiel du poids. Le frottement, lui, est encore nul puisque la balle n'a pas de vitesse.

1.6.3 En utilisant la méthode d'Euler, calculer la valeur de la vitesse à l'instant $t = 0{,}24$ s.

Données utiles à $t = 0{,}16$ s : $v_G = 0{,}143\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\dfrac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t} = 0{,}20\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $\Delta t = 0{,}080$ s (1.6.1)

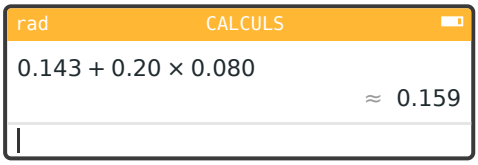
La seconde relation d'Euler, écrite entre $t = 0{,}16$ s et $t = 0{,}24$ s, donne :

$$v_G(0{,}24) = v_G(0{,}16) + \frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}(0{,}16) \times \Delta t = 0{,}143 + 0{,}20 \times 0{,}080$$

$$v_G(0{,}24) = 0{,}159\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

PIÈGE
Utiliser l'accélération de la date d'arrivée (0,24 s), encore inconnue, ou celle d'une autre colonne. La vitesse suivante se calcule toujours avec la vitesse et l'accélération de la date précédente.

À LA CALCULATRICE



1.6.4 En déduire la valeur de l'accélération à l'instant $t = 0{,}24$ s.

Données utiles $A = 1{,}27\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $B = 7{,}5\ \text{s}^{-1}$; $v_G(0{,}24) = 0{,}159\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (1.6.3)

La première relation d'Euler, à la date $t = 0{,}24$ s, donne :

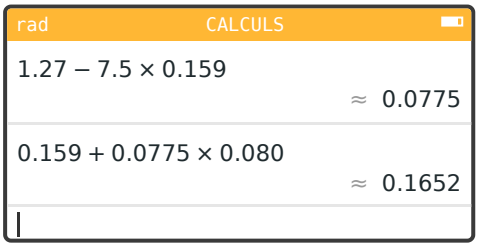
$$\frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}(0{,}24) = A - B \times v_G(0{,}24) = 1{,}27 - 7{,}5 \times 0{,}159$$

$$\frac{\mathrm{d}v_G}{\mathrm{d}t}(0{,}24) = 0{,}08\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

COMPRENDRE
Le résultat est arrondi au centième, comme les autres accélérations du tableau. Contrôle : la ligne suivante donne bien $0{,}159 + 0{,}0775 \times 0{,}080 = 0{,}165\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, valeur du tableau à $t = 0{,}32$ s.

MÉTHODE
Méthode d'Euler : à chaque date, 1) l'accélération se calcule avec l'équation différentielle et la vitesse de cette date ; 2) la vitesse suivante vaut vitesse + accélération × pas. On recommence colonne après colonne.

À LA CALCULATRICE

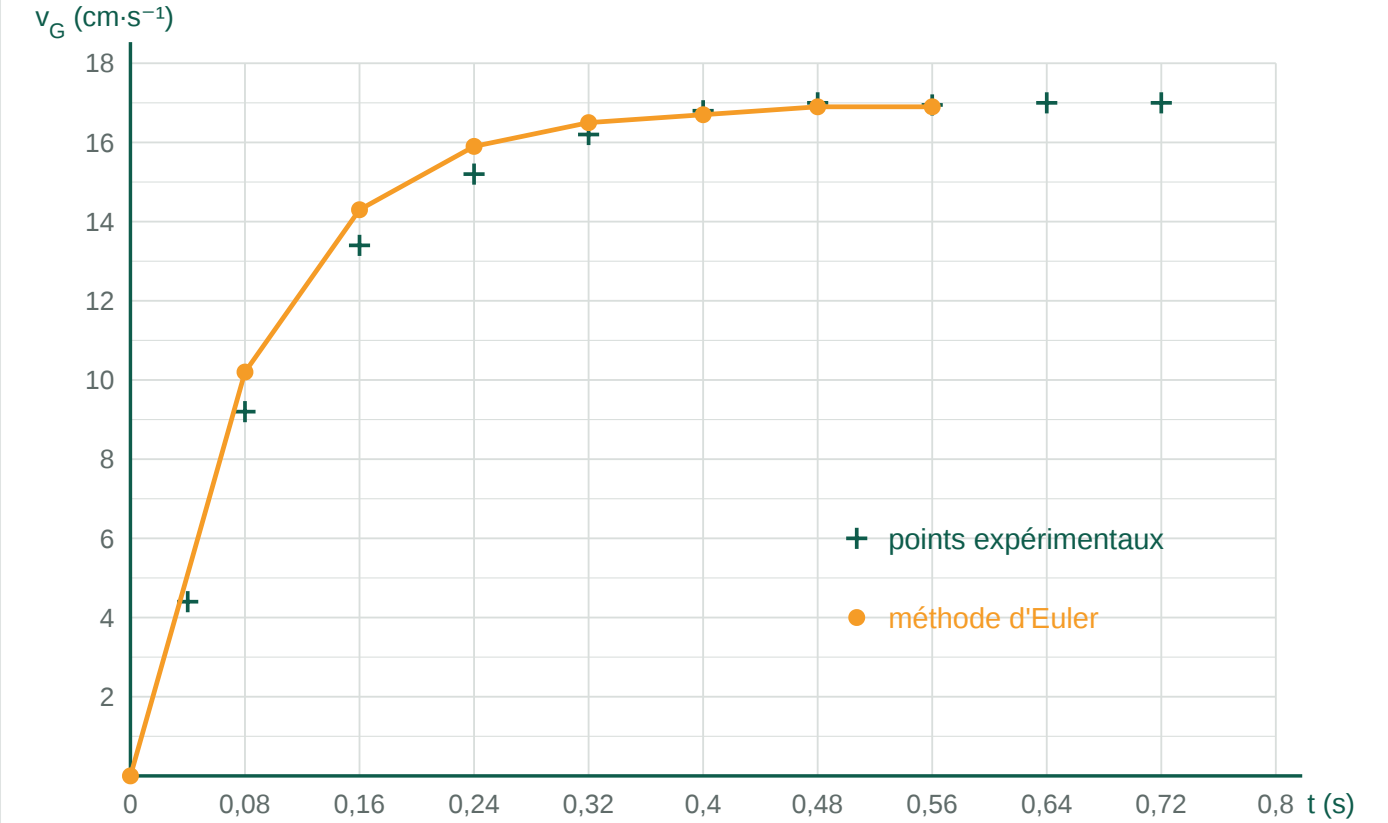


1.7 Placer sur la représentation $v_G = f(t)$ de l'annexe 1 les valeurs des vitesses obtenues par la méthode d'Euler et tracer la courbe passant par ces points.

Données utiles tableau complété avec $v_G(0{,}24) = 0{,}159\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (1.6.3)

Les vitesses du tableau sont converties en $\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ avant d'être placées sur l'annexe : 0 ; 10,2 ; 14,3 ; 15,9 ; 16,5 ; 16,7 ; 16,9 ; 16,9 aux dates 0 ; 0,080 ; 0,16 ; 0,24 ; 0,32 ; 0,40 ; 0,48 ; 0,56 s.

Huit points placés (de $t = 0$ à $t = 0{,}56$ s) et courbe tracée : voir l'annexe complétée.



1.7 · Annexe 1 complétée : points calculés par la méthode d'Euler et courbe passant par ces points

1.8 Sur quel paramètre peut-on agir pour améliorer la résolution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler ? La modélisation $\vec{f} = -k\,\vec{v}_G$ de la force de frottement est-elle valide ? Justifier.

On peut agir sur le pas d'itération Δt : plus il est petit, plus les valeurs calculées sont proches de la solution exacte de l'équation différentielle (au prix d'un plus grand nombre de calculs).

La courbe obtenue par la méthode d'Euler a la même allure que la série de points expérimentaux et elle en reste proche : écart d'environ $1\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ au début, puis même palier (16,9 contre $17\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$).

Il faut diminuer le pas Δt. Le modèle $\vec{f} = -k\,\vec{v}_G$ est valide : la courbe calculée suit les points expérimentaux.

COMPRENDRE

La courbe d'Euler passe un peu au-dessus des points pendant le régime transitoire. C'est l'effet d'un pas assez grand : l'accélération, qui diminue, est supposée constante pendant 0,080 s, ce qui surestime la vitesse.

2.1 À l'aide de l'expression de B (question 1.3) et de l'hypothèse $\vec{f} = -k\,\vec{v}_G$, exprimer la viscosité η en fonction de B, m et R.

Les deux expressions de la force, $\vec{f} = -k\,\vec{v}_G$ et $\vec{f} = -6\,\pi\,\eta\,R\,\vec{v}_G$, sont identiques si $k = 6\,\pi\,\eta\,R$.

Or $B = \dfrac{k}{m}$, donc $k = B\,m$, d'où $6\,\pi\,\eta\,R = B\,m$.

$$\eta = \frac{B\,m}{6\,\pi\,R}$$

2.2 Calculer la viscosité η de l'huile étudiée.

Données utiles $B = 7{,}5\ \text{s}^{-1}$; $m = 35{,}0\ \text{g} = 35{,}0 \times 10^{-3}$ kg ; $R = 2{,}00\ \text{cm} = 2{,}00 \times 10^{-2}$ m

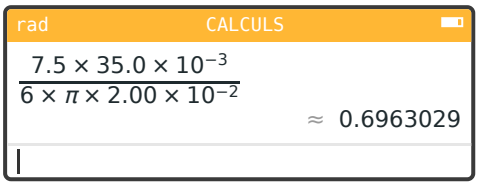
$$\eta = \frac{B\,m}{6\,\pi\,R} = \frac{7{,}5 \times 35{,}0 \times 10^{-3}}{6\,\pi \times 2{,}00 \times 10^{-2}}$$

$\eta = 0{,}70\ \text{Pa} \cdot \text{s}$

PIÈGE
Laisser m en grammes ou R en centimètres : la formule de Stokes exige le kilogramme et le mètre. Avec les valeurs brutes de l'énoncé, on trouve un nombre 10 fois trop grand.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs seulement, car $B = 7{,}5\ \text{s}^{-1}$ n'en a que deux.

À LA CALCULATRICE



2.3 À l'aide des valeurs de viscosité données, identifier l'huile de moteur étudiée.

Données utiles à 20 °C : SAE 10, $\eta = 0{,}088\ \text{Pa} \cdot \text{s}$; SAE 30, $\eta = 0{,}290\ \text{Pa} \cdot \text{s}$; SAE 50, $\eta = 0{,}700\ \text{Pa} \cdot \text{s}$

La valeur trouvée, $\eta = 0{,}70\ \text{Pa} \cdot \text{s}$ (2.2), est égale à la viscosité de l'huile SAE 50 et très éloignée des deux autres.

L'huile étudiée est l'huile SAE 50.