Réalisation artisanale d'un diapason électronique

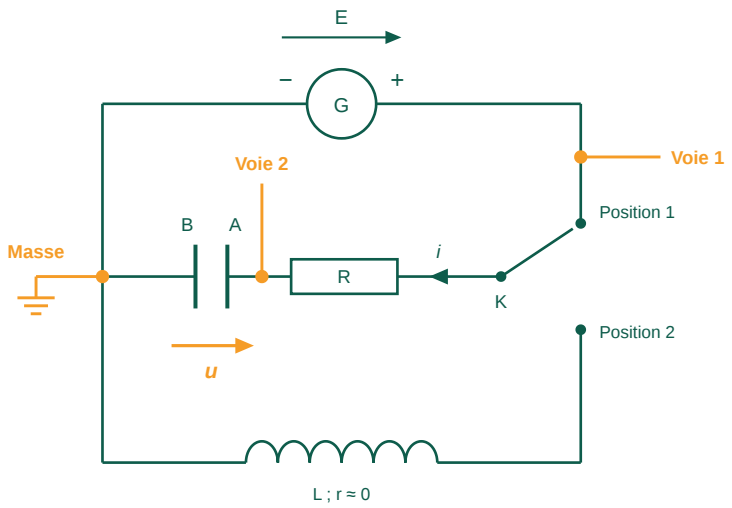
Bac S 2004 Antilles-Guyane rattrapage (ancien programme) · Exercice 2 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 Représenter sur le schéma de l'annexe 3 la tension u aux bornes du condensateur, en convention récepteur.

En convention récepteur, la flèche de la tension est de sens opposé à la flèche du courant. Le courant i traverse le condensateur de A vers B : la flèche de u va donc de B vers A.

$u = u_{AB}$: flèche tracée le long du condensateur, la pointe du côté de l'armature A.

PIÈGE
Dessiner la flèche de u dans le même sens que celle de i : c'est la convention générateur, et toutes les relations suivantes changent de signe.



1.1 · Annexe 3 complétée : flèche de la tension u (pointe vers A) et branchements de l'oscilloscope

1.2 Ajouter sur le schéma les connexions à l'oscilloscope : voie 1 pour la tension E (positive) aux bornes du générateur, voie 2 pour la tension u aux bornes du condensateur.

La borne $-$ du générateur et l'armature B sont reliées par un fil : c'est là que l'on branche la masse, commune aux deux voies.

- Voie 1 : sur la borne $+$ du générateur, elle affiche $E > 0$.
- Voie 2 : sur l'armature A, elle affiche $u_{AB} = u$.

Masse en B (borne $-$ de G), voie 1 à la borne $+$ de G, voie 2 en A (voir l'annexe 3 complétée).

MÉTHODE
Une voie d'oscilloscope affiche le potentiel du point où elle est branchée moins celui de la masse. On place donc la masse au pied des flèches de tension, les voies à leurs pointes.

1.3 Donner la relation entre la charge q_A de l'armature A, l'intensité i et le temps t.

Le courant i, compté positivement, arrive sur l'armature A : l'intensité est le débit de charge reçu par cette armature.

$$i = \frac{\mathrm{d}q_A}{\mathrm{d}t}$$

PIÈGE
Avec le sens positif choisi, il n'y a pas de signe « $-$ ». Il apparaîtrait si la flèche de i quittait l'armature A.

1.4 Donner la relation entre la charge q_A, la tension u et la capacité C.

$$q_A = C\,u$$

COMPRENDRE
La charge est celle de l'armature vers laquelle pointe la flèche de tension : $q_A = C\,u_{AB}$, avec q_A en coulombs, C en farads et u en volts.

1.5 Avec les relations des questions 1.3 et 1.4 et la loi d'additivité des tensions, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u pendant la charge.

Interrupteur en position 1, loi d'additivité des tensions : $E = u_R + u$.

Loi d'Ohm (convention récepteur) : $u_R = R\,i$.

Or $i = \dfrac{\mathrm{d}q_A}{\mathrm{d}t}$ et $q_A = C\,u$ avec C constante, donc $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

$$u + RC\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = E$$

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement : additivité des tensions, loi d'Ohm, puis $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ pour ne garder que u et sa dérivée.

1.6 Vérifier que $u = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)}\right)$ est solution de l'équation différentielle.

On dérive la fonction proposée : $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{RC}\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}$.

On remplace dans le membre de gauche de l'équation :

$$u + RC\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = E - E\,\mathrm{e}^{-t/(RC)} + RC \times \frac{E}{RC}\,\mathrm{e}^{-t/(RC)} = E$$

Le membre de gauche vaut E à chaque instant : la fonction proposée est bien solution.

PIÈGE
Erreur de signe dans la dérivée : $-\mathrm{e}^{-t/(RC)}$ a pour dérivée $+\dfrac{1}{RC}\,\mathrm{e}^{-t/(RC)}$, les deux signes « $-$ » se compensent.

COMPRENDRE
La solution respecte aussi la condition initiale : à $t = 0$, $u = E\,(1 - 1) = 0$, le condensateur est bien déchargé.

1.7.1 Rappeler l'expression de la constante de temps τ du circuit en fonction de R et de C.

$$\tau = RC$$

1.7.2 Vérifier que τ est homogène à une durée, à l'aide de l'équation différentielle ou de sa solution.

L'équation différentielle s'écrit $u + \tau\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = E$. Les termes d'une somme ont la même dimension, donc $\tau\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ est une tension, comme u et E.

Or $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ est une tension divisée par une durée : $[\tau] \times \dfrac{[U]}{[T]} = [U]$.

$[\tau] = [T]$: τ est homogène à une durée (elle s'exprime en secondes).

MÉTHODE
Autre argument, avec la solution : l'exposant $-\dfrac{t}{\tau}$ d'une exponentielle est sans dimension, donc τ a la dimension de t.

1.7.3 Déterminer graphiquement la valeur de τ sur l'annexe 4, en justifiant la méthode.

Données utiles $E = 12$ V

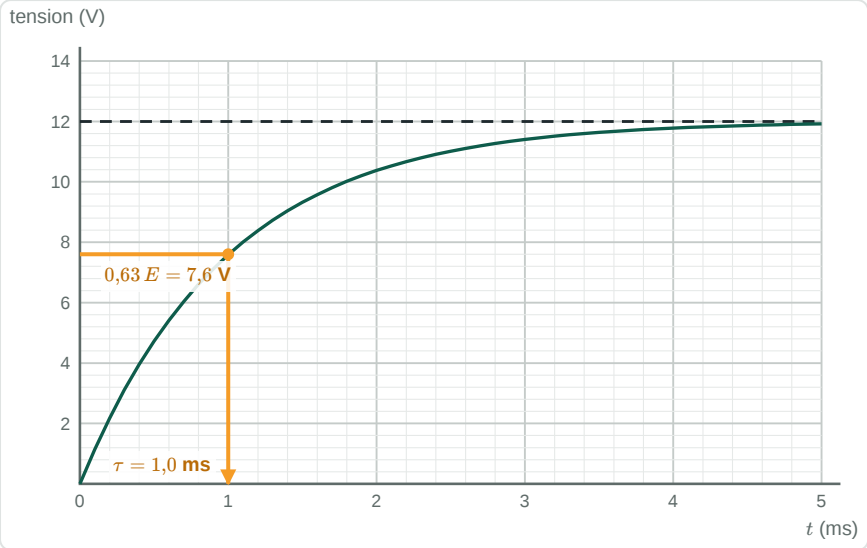
À l'instant $t = \tau$: $u(\tau) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = 0{,}63\,E$.

$u(\tau) = 0{,}63 \times 12 = 7{,}6$ V. Sur l'annexe 4, la courbe $u = f(t)$ atteint 7,6 V à l'abscisse $t = 0{,}0010$ s.

$$\tau = 1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{s} = 1{,}0\ \text{ms}$$

COMPRENDRE
Contrôle : $RC = 1000 \times 1{,}0 \times 10^{-6} = 1{,}0 \times 10^{-3}$ s. La lecture graphique donne au mieux deux chiffres significatifs, comme E et C.

MÉTHODE
Autre méthode : tracer la tangente à la courbe à l'origine ; elle coupe l'asymptote $u = E$ à l'abscisse $t = \tau$.



À LA CALCULATRICE

rad CALCULS
0.63 × 12
≈ 7.56

1.7.3 · Annexe 4 (temps convertis en ms) : lecture de τ à 63 % de E

1.7.4 Au bout de quelle durée, exprimée en fonction de τ, considère-t-on le condensateur totalement chargé ?

À $t = 5\,\tau$: $u = E\left(1 - \mathrm{e}^{-5}\right) = 0{,}99\,E$, la tension a atteint 99 % de sa valeur finale.

Le condensateur est considéré comme chargé au bout de $5\,\tau$ (ici 5,0 ms).

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS
$1 - e^{-5}$
≈ 0.9932621

2.1.1 Les oscillations électriques observées sont amorties. Quel dipôle est responsable de cet amortissement ?

La résistance de la bobine est négligeable : seul le conducteur ohmique dissipe de l'énergie, par effet Joule, sous forme de transfert thermique.

Le dipôle responsable de l'amortissement est le conducteur ohmique de résistance R.

COMPRENDRE
La bobine et les oscillations électriques (circuits RL, LC, RLC) ne figurent plus au programme actuel de spécialité de Terminale ; le circuit RC de la partie 1 y figure toujours.

2.1.2 Qualifier ce régime d'oscillations par un terme approprié.

La tension u oscille autour de zéro avec une amplitude qui diminue au cours du temps.

Le régime est **pseudo-périodique**.

PIÈGE
Écrire « périodique » : la tension ne reprend jamais exactement la même valeur maximale, le signal ne se répète donc pas à l'identique.

2.2 Comment appelle-t-on la durée écoulée entre les points C et D de l'annexe 5 ? Évaluer graphiquement sa valeur.

En C et en D, la tension s'annule en croissant : ces deux points sont séparés par une oscillation complète. La durée qui les sépare est la pseudo-période T.

Lecture sur l'annexe 5 : $t_C = 1{,}5$ ms et $t_D = 3{,}5$ ms, donc $T = t_D - t_C = 3{,}5 - 1{,}5$.

Pseudo-période : $T = 2{,}0$ ms

PIÈGE
Prendre deux annulations successives de u : elles ne sont séparées que d'une demi-pseudo-période. Il faut deux passages par zéro dans le même sens.

2.3 Les élèves pensent que ce circuit n'est pas utilisable. Indiquer la raison de cette constatation.

L'amplitude de la tension décroît très vite : de 12 V au départ, elle tombe à environ 2 V au bout de 10 ms. Le haut-parleur n'émettrait qu'un son très bref, de niveau sonore décroissant.

Le circuit ne fournit pas une tension sinusoïdale d'amplitude constante : la note ne durerait que quelques millisecondes.

3.1 Expliquer en une phrase le rôle, du point de vue énergétique, du dispositif qui entretient les oscillations.

Le dispositif d'entretien fournit au circuit, à chaque instant, une énergie égale à celle que le conducteur ohmique dissipe par effet Joule.

COMPRENDRE
L'énergie totale du circuit reste alors constante : elle s'échange sans perte entre le condensateur et la bobine, et l'amplitude ne diminue plus.

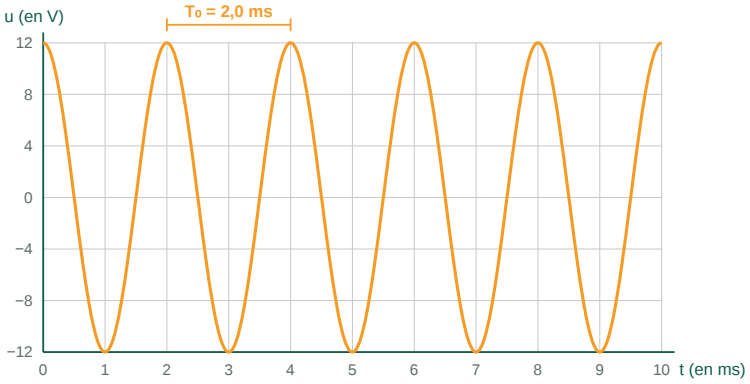
3.2 Les paramètres du circuit n'étant pas modifiés, représenter sur l'annexe 6 la courbe $u = f(t)$ obtenue après entretien des oscillations.

Les oscillations entretenues sont sinusoïdales, d'amplitude constante :

- valeur initiale et amplitude : $u(0) = E = 12$ V ;
- période inchangée : 2,0 ms, soit cinq périodes entre 0 et 10 ms.

Sinusoïde partant de 12 V, oscillant entre -12 V et $+12$ V, de période 2,0 ms (voir l'annexe 6 complétée).

MÉTHODE
Placer d'abord les points remarquables : maximums à 0, 2, 4 ms…, minimums à 1, 3, 5 ms…, passages par zéro à 0,5 ; 1,5 ; 2,5 ms…, puis relier d'un trait arrondi.



3.2 · Annexe 6 complétée : sinusoïde d'amplitude 12 V et de période 2,0 ms

3.3 Rappeler l'expression de la période propre T_0 du circuit oscillant et calculer sa valeur.

Données utiles $C = 1{,}0\ \mu\text{F} = 1{,}0 \times 10^{-6}$ F ; $L = 0{,}100$ H

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{0{,}100 \times 1{,}0 \times 10^{-6}} = 2{,}0 \times 10^{-3}\ \text{s}$$

$$T_0 = 2{,}0 \times 10^{-3}\ \text{s} = 2{,}0\ \text{ms}$$

PIÈGE
Laisser C en microfarads : la formule exige L en henrys et C en farads pour obtenir T_0 en secondes.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme C, la donnée la moins précise. On retrouve la pseudo-période lue à la question 2.2 : l'amortissement est assez faible pour ne pas la modifier.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$2 \times \pi \times \sqrt{0.100 \times 1.0 \times 10^{-6}}$
≈ 0.001986918

3.4 En déduire la fréquence f_0 de la tension obtenue.

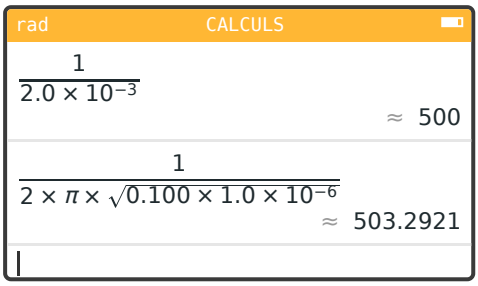
Données utiles $T_0 = 2{,}0 \times 10^{-3}$ s (3.3)

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2{,}0 \times 10^{-3}}$$

$f_0 = 5{,}0 \times 10^2$ Hz

COMPRENDRE
Avec la valeur non arrondie de T_0, on trouve 503 Hz : le résultat à deux chiffres significatifs est le même.

À LA CALCULATRICE



3.5.1 La fréquence obtenue est-elle celle d'un son de l'octave 3 de la gamme ?

Données utiles document : do 262 Hz ; ré 294 Hz ; mi 330 Hz ; fa 349 Hz ; sol 392 Hz ; la 440 Hz ; si 494 Hz ; $f_0 = 5{,}0 \times 10^2$ Hz (3.4)

Aucune des sept fréquences du document n'est égale à $5{,}0 \times 10^2$ Hz ; la plus proche est celle du si (494 Hz).

Non : le son émis ne correspond à aucune note de l'octave 3, et ce n'est pas le la_3 recherché (440 Hz).

COMPRENDRE
L'octave 3 s'étend de 262 Hz à $2 \times 262 = 524$ Hz : la fréquence obtenue tombe dans cet intervalle, juste au-dessus du si, mais sur aucune note de la gamme.

3.5.2 Quels paramètres peut-on changer pour modifier la valeur de la fréquence émise ?

$f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$: la fréquence ne dépend que de L et de C.

On peut modifier l'inductance L de la bobine ou la capacité C du condensateur.

PIÈGE
Citer R ou E : la résistance agit sur l'amortissement, la tension du générateur sur l'amplitude, aucune des deux sur la fréquence propre.

3.5.3 Les élèves ne disposant pas d'autre condensateur, calculer la valeur de l'autre paramètre qui permet d'obtenir la note la 3.

Données utiles $f_0 = 440$ Hz (la_3) ; $C = 1{,}0 \times 10^{-6}$ F

Le seul paramètre réglable est l'inductance L. De $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ on tire $f_0^2 = \dfrac{1}{4\pi^2 LC}$, soit

$$L = \frac{1}{4\pi^2 C f_0^2}$$

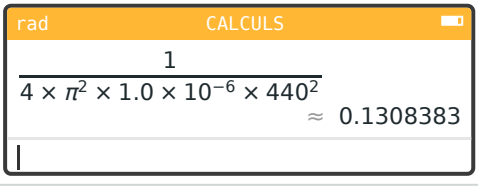
$$L = \frac{1}{4\pi^2 \times 1{,}0 \times 10^{-6} \times 440^2} = 0{,}13 \text{ H}$$

$L = 0{,}13$ H

COMPRENDRE
Contrôle de cohérence : pour abaisser la fréquence de 500 Hz à 440 Hz, il faut augmenter L ; on passe bien de 0,100 H à 0,13 H.

MÉTHODE
Pour isoler une grandeur placée sous une racine, élever d'abord les deux membres au carré, puis isoler.

À LA CALCULATRICE



3.5.4 Le paramètre est réglé sur 232 mH : déterminer la note alors émise par le diapason.

Données utiles $L = 232\ \text{mH} = 0{,}232\ \text{H}$; $C = 1{,}0 \times 10^{-6}\ \text{F}$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}232 \times 1{,}0 \times 10^{-6}}} = 3{,}3 \times 10^2\ \text{Hz}$$

D'après le document, la fréquence 330 Hz est celle du mi.

$f_0 = 3{,}3 \times 10^2$ Hz : le diapason émet la note **mi**$_3$.

PIÈGE
Oublier de convertir 232 mH en henrys : le résultat serait faux d'un facteur $\sqrt{1000} \approx 32$.

À LA CALCULATRICE

