Brouillard et vitesse

Bac S 2004 Antilles-Guyane (ancien programme) · Exercice 1 **9,5 points** **Durée conseillée 1 h 57**

1.1 Quelle propriété présente le champ de pesanteur terrestre dans un volume de l'ordre du km^3, comme celui d'une nappe de brouillard ?

Dans un volume aussi petit devant les dimensions de la Terre, le champ de pesanteur est **uniforme**.

$\vec{g}$ est le même en tout point : même direction (verticale), même sens (vers le bas), même valeur.

COMPRENDRE
Uniforme signifie « identique en tout point de l'espace ». Ne pas confondre avec constant, qui signifie « qui ne varie pas au cours du temps ».

1.2 Nommer et énoncer la loi qui, appliquée au centre d'inertie de la goutte, permet d'exprimer son vecteur accélération.

Il s'agit de la **deuxième loi de Newton** : dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système de masse m constante est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}_G$$

PIÈGE
Oublier « dans un référentiel galiléen » : la loi n'est valable que dans ce cadre, et la précision est attendue dans l'énoncé.

COMPRENDRE
Le « centre d'inertie » de ce sujet s'appelle aujourd'hui le centre de masse : c'est le même point.

1.3 Établir l'équation horaire du centre d'inertie de la goutte, soumise au seul champ de pesanteur.

Données utiles axe (Oz) vertical descendant ; à $t = 0$: goutte immobile en O

Système {goutte} ; référentiel terrestre supposé galiléen ; seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

En projection sur l'axe (Oz) descendant : $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g$.

Primitive : $v(t) = g\,t + v_0$, avec $v_0 = 0$ (goutte immobile au départ), donc $v(t) = g\,t$.

Comme $v = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, une seconde primitive donne $z(t) = \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + z_0$, avec $z_0 = 0$ (origine en O).

$$z(t) = \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

PIÈGE
L'axe est orienté vers le bas : $a_z = +g$. Un signe « $-$ » ici donnerait une goutte qui monte.

MÉTHODE
Chute libre : 1) système, référentiel, forces ; 2) deuxième loi, d'où $\vec{a}$; 3) projection sur l'axe ; 4) deux primitives successives, chaque constante étant fixée par une condition initiale.

1.4 Calculer la vitesse de la goutte quand elle atteint le sol.

Données utiles $h = 10$ m ; $g = 9{,}8$ N · kg^{-1} ; $v = g\,t$ et $z = \frac{1}{2}\,g\,t^2$ (1.3)

La goutte touche le sol à la date t_1 telle que $z(t_1) = h$: $\dfrac{1}{2}\,g\,t_1^2 = h$, soit $t_1 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

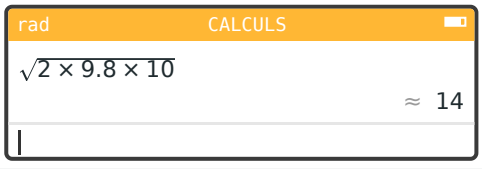
Sa vitesse vaut alors $v_1 = g\,t_1 = g\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = \sqrt{2\,g\,h}$.

$$v_1 = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 10}$$

$$v_1 = 14\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme g et h. Cette vitesse (environ $50\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) est sans rapport avec la lente descente d'un brouillard : le modèle sans frottement ne convient pas.

À LA CALCULATRICE



2.1 Donner l'expression de la poussée d'Archimède s'exerçant sur la goutte en fonction de ρ_{air}, V_g et g.

La poussée d'Archimède est verticale, dirigée vers le haut ; sa valeur est le poids du volume d'air déplacé par la goutte.

$$\Pi = \rho_{\text{air}}\, V_g\, g$$

PIÈGE
C'est la masse volumique du fluide déplacé (l'air) qui intervient, pas celle de l'eau de la goutte.

2.2 Exprimer le poids de la goutte en fonction de ρ_{eau}, V_g et g, le comparer à la poussée d'Archimède et conclure.

Données utiles $\rho_{\text{eau}} = 1{,}0 \times 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $\rho_{\text{air}} = 1{,}3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; Π (2.1)

La masse de la goutte est $m = \rho_{\text{eau}}\, V_g$, donc $P = m\, g = \rho_{\text{eau}}\, V_g\, g$.

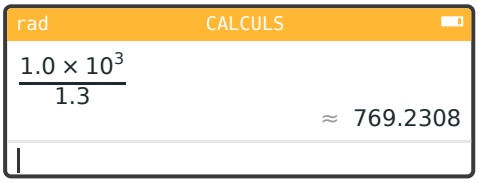
Les deux expressions ne diffèrent que par la masse volumique :

$$\frac{P}{\Pi} = \frac{\rho_{\text{eau}}}{\rho_{\text{air}}} = \frac{1{,}0 \times 10^3}{1{,}3} \approx 7{,}7 \times 10^2$$

$P \approx 770\,\Pi$: la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids.

MÉTHODE
Pour comparer deux grandeurs de même nature, calculer leur rapport : V_g et g se simplifient et la conclusion est chiffrée.

À LA CALCULATRICE



2.3.1 Avec la force de frottement fluide $\vec{f} = -k\,\vec{v}$, établir l'équation différentielle du mouvement selon (Oz) et la mettre sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a\,v + b$ (1).

Système {goutte} ; référentiel terrestre supposé galiléen. Forces retenues : le poids $\vec{P}$ (vertical, vers le bas) et le frottement $\vec{f} = -k\,\vec{v}$ (opposé à la vitesse, donc vers le haut) ; la poussée d'Archimède est négligée (2.2).

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}$.

En projection sur (Oz) descendant : $m\,g - k\,v = m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

On divise par m :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m}\,v + g$$

PIÈGE
Signes de la projection : la goutte descend, $v > 0$ sur l'axe descendant, donc le frottement se projette en $-k\,v$ et le poids en $+m\,g$.

2.3.2 Identifier les constantes a et b et les exprimer en fonction des données de l'énoncé.

Données utiles $m = \rho_{\text{eau}}\, V_g$; $V_g = \frac{4}{3}\,\pi\, r^3$

Par identification avec $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a\,v + b$: $a = -\dfrac{k}{m}$ et $b = g$.

Avec $m = \rho_{\text{eau}}\, V_g = \dfrac{4}{3}\,\pi\, r^3\, \rho_{\text{eau}}$:

$$a = -\frac{k}{\rho_{\text{eau}}\, V_g} = -\frac{3\,k}{4\,\pi\, r^3\, \rho_{\text{eau}}} \text{ et } b = g$$

COMPRENDRE
b est l'accélération initiale : à $t = 0$ la vitesse est nulle, le frottement aussi, et la goutte démarre comme en chute libre.

2.3.3 Exprimer la vitesse limite v_L en fonction de m, g et k, dans le cas où l'accélération du centre d'inertie s'annule.

Quand la vitesse limite est atteinte, $v = v_L$ est constante : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$.

L'équation (1) devient $0 = -\dfrac{k}{m} v_L + g$.

$$v_L = \frac{m\,g}{k}$$

COMPRENDRE
À la vitesse limite, le frottement compense exactement le poids ($k\,v_L = m\,g$) : le mouvement devient rectiligne uniforme.

2.3.4 Rechercher par analyse dimensionnelle l'unité du coefficient k.

Données utiles $v_L = \dfrac{m\,g}{k}$ (2.3.3)

On isole k : $k = \dfrac{m\,g}{v_L}$.

m est une masse (kg), v_L une vitesse ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$) et g une accélération : comme $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$, on a $1\ \mathrm{N \cdot kg^{-1}} = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

$$[k] = \frac{\mathrm{kg} \times \mathrm{m \cdot s^{-2}}}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}} = \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$$

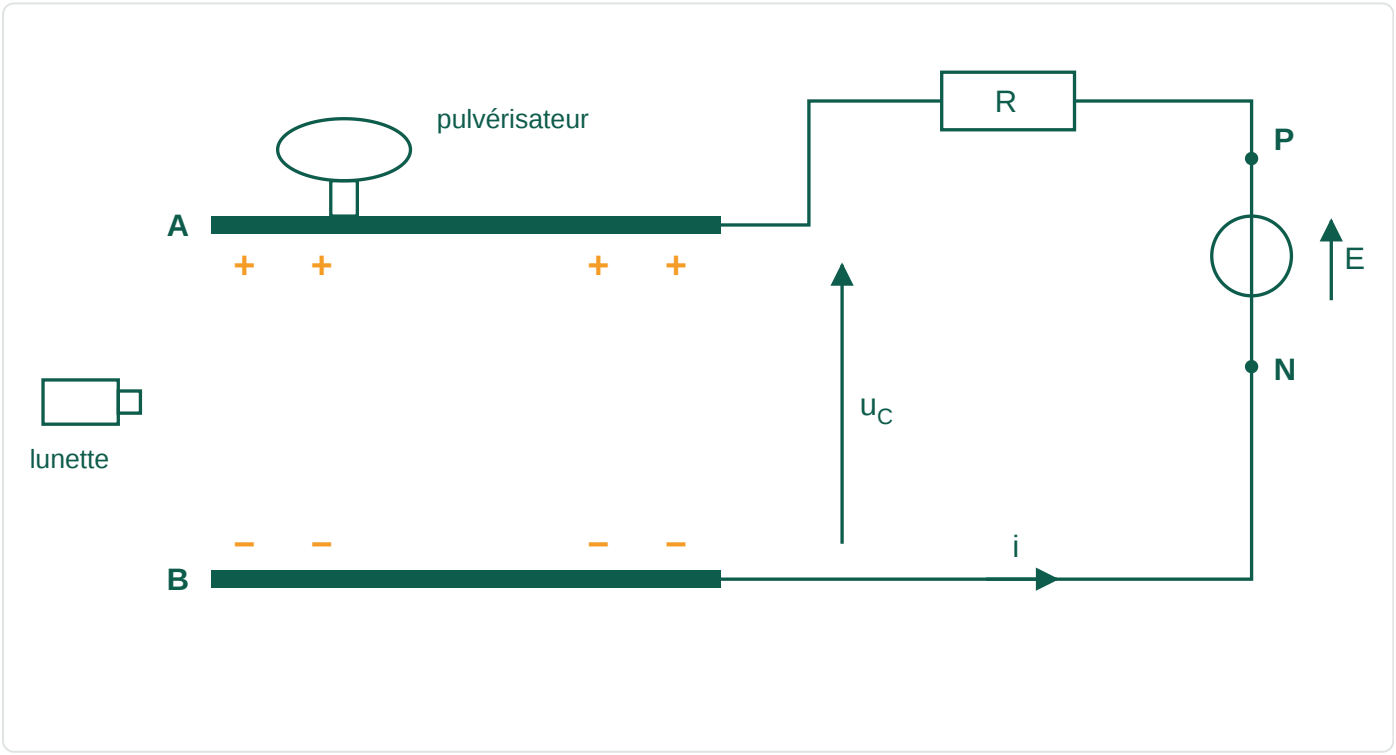
k s'exprime en $\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$.

PIÈGE
Laisser g en $\mathrm{N \cdot kg^{-1}}$: il faut ramener le newton aux unités de base, sinon la simplification n'apparaît pas.

3.1.1 Sur le schéma de l'annexe 1, indiquer le signe de la charge qui apparaît sur chaque armature pour $t > 0$.

L'armature A est reliée, à travers le résistor, à la borne positive P du générateur ; l'armature B est reliée à la borne négative N. Le courant, qui sort par P, apporte des charges positives sur A ; B prend la charge opposée.

Armature A : charge positive ($+q$) ; armature B : charge négative ($-q$).



3.1.1 · Annexe 1 complétée : signe des charges sur les armatures

3.1.2 En considérant l'orientation choisie pour i, écrire la relation entre l'intensité $i(t)$ et la charge q acquise par l'armature positive.

Avec l'orientation du schéma, le courant i arrive sur l'armature A, qui porte la charge q : l'intensité est le débit de charge reçu par cette armature.

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

PIÈGE
Le signe dépend de l'orientation : si la flèche de i s'éloignait de l'armature portant q, il faudrait écrire $i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

3.1.3 Sachant que $q(t) = C\,u_C(t)$, établir l'expression liant $i(t)$ à $u_C(t)$.

$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(C\,u_C)}{\mathrm{d}t}$, et la capacité C est une constante.

$$i(t) = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

3.1.4 En déduire l'équation différentielle (2) à laquelle obéit la tension $u_C(t)$.

Loi des mailles (additivité des tensions) : $U_e = u_R + u_C$.

Loi d'Ohm : $u_R = R\,i = R\,C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

$$R\,C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U_e \quad (2)$$

MÉTHODE
Circuit RC : 1) loi des mailles ; 2) loi d'Ohm pour u_R ; 3) $i = C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. On obtient toujours une équation du premier ordre en u_C.

3.2 Vérifier que $u_C(t) = U_e\left(1 - e^{-t/RC}\right)$ satisfait à l'équation différentielle (2).

On dérive la solution proposée : $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = U_e \times \frac{1}{RC}\,e^{-t/RC} = \frac{U_e}{RC}\,e^{-t/RC}$.

On reporte dans le premier membre de (2) :

$$R\,C \times \frac{U_e}{RC}\,e^{-t/RC} + U_e\left(1 - e^{-t/RC}\right) = U_e\,e^{-t/RC} + U_e - U_e\,e^{-t/RC} = U_e$$

Le premier membre est égal à U_e à toute date : la solution proposée vérifie (2).

PIÈGE
La dérivée de $e^{-t/RC}$ est $-\frac{1}{RC}\,e^{-t/RC}$: avec le signe « $-$ » déjà présent dans la parenthèse, la dérivée de u_C est positive.

4.1 À partir de l'allure des courbes $v = f(t)$ et $u_C = f(t)$ de l'annexe 2, identifier le régime d'évolution commun aux deux systèmes (divergent, convergent ou périodique).

Les deux courbes ont la même allure : la grandeur croît d'abord rapidement (régime transitoire), puis se stabilise à une valeur constante (régime permanent), voisine de $2{,}3 \times 10^{-2}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pour v et de 1000 V pour u_C.

Proposition b) : régime convergent.

COMPRENDRE
Les valeurs limites se lisent sur les asymptotes horizontales : v_L pour la goutte, U_e pour le condensateur.

4.2 Rappeler l'expression de la constante de temps τ d'un circuit RC et réécrire $u_C(t)$ en fonction de τ.

Pour un circuit RC : $\tau = R\,C$.

$$u_C(t) = U_e\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

4.3 En comparant les expressions de $v(t)$ et de $u_C(t)$, donner l'expression de la constante de temps pour la goutte de brouillard.

Données utiles $v(t) = v_L\left(1 - e^{-kt/m}\right)$

Les deux expressions ont la même forme, v_L jouant le rôle de U_e.
L'identification des exposants donne $\frac{t}{\tau} = \frac{kt}{m}$.

$$\tau = \frac{m}{k}$$

COMPRENDRE
Vérification : k est en $\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$ (2.3.4), donc $\frac{m}{k}$ est bien en secondes. On retrouve aussi $\tau = -\frac{1}{a}$, avec a de la question 2.3.2.

5.1 Montrer que, pour une gouttelette chargée immobilisée entre les armatures, les seules forces à prendre en compte sont le poids et la force électrique.

Quatre forces sont envisageables : le poids, la force électrique, la poussée d'Archimède et le frottement fluide.

- La poussée d'Archimède est négligeable devant le poids (2.2).
- La gouttelette est immobile : $v = 0$, donc $f = k\,v = 0$.

Il ne reste que le poids $\vec{P}$ et la force électrique $\vec{F}_e$.

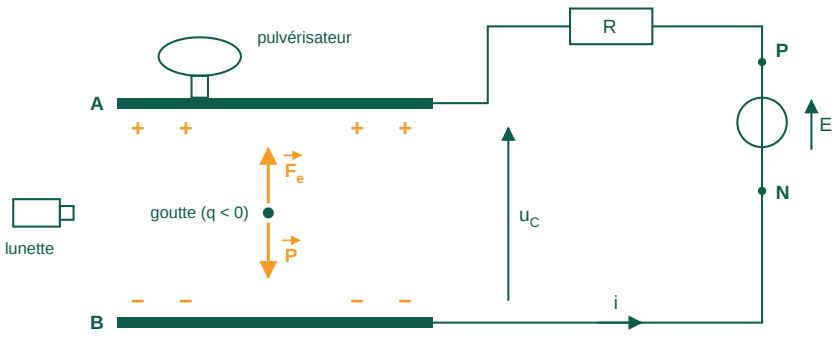
5.2 À l'aide de la première loi de Newton, écrire la relation vectorielle entre ces deux forces et les représenter sur le schéma de l'annexe 1.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la gouttelette est immobile : d'après la première loi de Newton (principe d'inertie), les forces qu'elle subit se compensent.

$$\vec{P} + \vec{F}_e = \vec{0}, \text{ soit } \vec{F}_e = -\vec{P}$$

Le poids est vertical vers le bas ; la force électrique est donc verticale, vers le haut, de même longueur sur le schéma.

PIÈGE
Sur le schéma, deux flèches de longueurs différentes contredisent la relation écrite : les tracer égales, opposées, toutes deux à partir de la gouttelette.



5.2 · Annexe 1 complétée : forces sur la gouttelette immobile (même longueur, sens opposés)

5.3 Établir l'expression littérale de la valeur absolue de la charge q, puis en déduire sa valeur.

Données utiles $U_e = 1{,}0 \times 10^3$ V ; $d = 0{,}10$ m ; $r = 5{,}4 \times 10^{-6}$ m ; $\rho_{\text{eau}} = 1{,}0 \times 10^3$ kg · m^{-3} ; $g = 9{,}8$ N · kg^{-1}

D'après 5.2, les deux forces ont la même valeur : $F_e = P$, soit $|q| \dfrac{U_e}{d} = m\,g$.

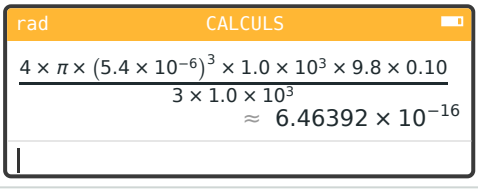
Avec $m = \rho_{\text{eau}}\,V_g = \rho_{\text{eau}} \times \dfrac{4}{3}\,\pi\,r^3$:

$$|q| = \frac{4\,\pi\,r^3\,\rho_{\text{eau}}\,g\,d}{3\,U_e}$$

$$|q| = \frac{4 \times \pi \times (5{,}4 \times 10^{-6})^3 \times 1{,}0 \times 10^3 \times 9{,}8 \times 0{,}10}{3 \times 1{,}0 \times 10^3}$$

$|q| = 6{,}5 \times 10^{-16}$ C, et comme la charge est négative : $q = -6{,}5 \times 10^{-16}$ C

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Le rayon est au cube : oublier l'exposant, ou ne pas mettre $5{,}4 \times 10^{-6}$ entre parenthèses à la calculatrice, fausse le résultat de plusieurs puissances de dix.

COMPRENDRE
L'énoncé écrit $F_e = q\,\dfrac{U_e}{d}$: avec q négative, une valeur de force serait négative. Il faut lire $F_e = |q|\,\dfrac{U_e}{d}$.

5.4 D'après le sens de la force électrique, déterminer le signe des charges Q_A et Q_B portées par les armatures. Ce résultat est-il cohérent avec celui de la question 3 ?

La force électrique est dirigée vers le haut : la gouttelette, de charge négative, est attirée par l'armature supérieure A et repoussée par l'armature inférieure B. Deux charges de signes contraires s'attirent, deux charges de même signe se repoussent.

$Q_A > 0$ et $Q_B < 0$: c'est cohérent avec les signes trouvés en 3.1.1.

COMPRENDRE
C'est le principe de l'expérience de Millikan : en immobilisant des gouttelettes chargées, on mesure leur charge, toujours multiple de $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C. Ici $|q| \approx 4 \times 10^3\,e$.