La pile cuivre aluminium et le condensateur

Bac S 2006 La Réunion (ancien programme) · Exercice 1 **8 points** **Durée conseillée 1 h 44**

I.1 Quelle est la polarité de la pile ?

Données utiles borne COM sur l'électrode d'aluminium ; $U = +1{,}8$ V

Le voltmètre affiche la différence de potentiel entre sa borne V et sa borne COM : $U = V_{Cu} - V_{Al}$.

Comme $U > 0$, on a $V_{Cu} > V_{Al}$.

La lame de cuivre est la borne positive, la lame d'aluminium la borne négative.

PIÈGE
Répondre sans justifier. C'est le signe de U, associé à la position de la borne COM, qui donne la polarité : avec la borne COM sur le cuivre, on lirait $-1{,}8$ V.

I.2 Quel est le rôle du pont salin ?

Le pont salin relie électriquement les deux solutions : ses ions se déplacent et ferment le circuit, ce qui permet au courant de passer.

Il assure le passage du courant entre les deux béchers et maintient chaque solution électriquement neutre.

COMPRENDRE
Sans pont, la solution côté aluminium s'enrichirait en charges positives et celle côté cuivre s'en appauvrirait : la pile s'arrêterait aussitôt.

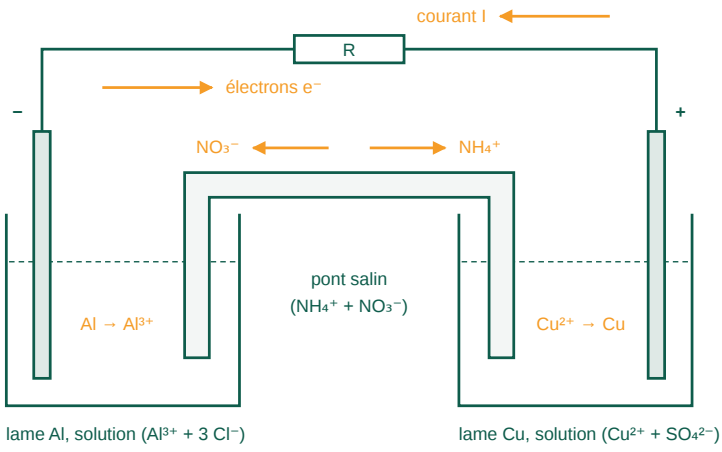
II.1 Faire un schéma légendé de la pile reliée à un conducteur ohmique : sens du courant, déplacement des porteurs de charge à l'intérieur et à l'extérieur de la pile.

À l'extérieur de la pile, le courant va de la borne $+$ (cuivre) vers la borne $-$ (aluminium) en traversant le conducteur ohmique. Les porteurs de charge sont les électrons, qui circulent en sens inverse : de l'aluminium vers le cuivre.

À l'intérieur de la pile, les porteurs de charge sont les ions. Les cations (NH_4^+ du pont, Al^{3+}, Cu^{2+}) se déplacent vers le bécher du cuivre ; les anions (NO_3^- du pont, Cl^-, SO_4^{2-}) vers le bécher de l'aluminium.

Courant : du cuivre vers l'aluminium dans le circuit extérieur ; électrons : de l'aluminium vers le cuivre.

PIÈGE
Faire circuler des électrons dans les solutions ou dans le pont salin. En solution, seuls les ions transportent la charge.



II.1 · Pile cuivre-aluminium en fonctionnement : courant, électrons et ions

II.2 Écrire et nommer les réactions qui se produisent aux électrodes.

Les électrons arrivent sur la lame de cuivre (borne $+$) : ils y sont consommés. C'est une **réduction** :

$$\mathrm{Cu^{2+}\,(aq) + 2\,e^- = Cu\,(s)}$$

Les électrons partent de la lame d'aluminium (borne $-$) : ils y sont libérés. C'est une **oxydation** :

$$\mathrm{Al\,(s) = Al^{3+}\,(aq) + 3\,e^-}$$

Réduction des ions cuivre(II) à l'électrode de cuivre ; oxydation de l'aluminium à l'électrode d'aluminium.

MÉTHODE
La borne négative fournit les électrons au circuit : il s'y produit toujours l'oxydation (anode). La borne positive les reçoit : il s'y produit la réduction (cathode).

II.3 Montrer que la transformation entre les deux couples peut s'écrire $\mathrm{3\,Cu^{2+} + 2\,Al = 3\,Cu + 2\,Al^{3+}}$.

Le nombre d'électrons captés est égal au nombre d'électrons cédés. On multiplie la réduction par 3 et l'oxydation par 2 pour échanger 6 électrons :

$\mathrm{3\,Cu^{2+}\,(aq) + 6\,e^- = 3\,Cu\,(s)}$ et $\mathrm{2\,Al\,(s) = 2\,Al^{3+}\,(aq) + 6\,e^-}$

En additionnant membre à membre, les électrons se simplifient :

$$\mathrm{3\,Cu^{2+}\,(aq) + 2\,Al\,(s) = 3\,Cu\,(s) + 2\,Al^{3+}\,(aq)}$$

PIÈGE
Laisser des électrons dans l'équation finale, ou oublier de vérifier la conservation des charges : $3 \times 2 = 6$ charges positives à gauche, $2 \times 3 = 6$ à droite.

II.4.1 Calculer le quotient de réaction initial.

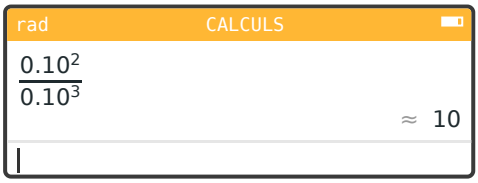
Données utiles $[\mathrm{Al^{3+}}]_i = [\mathrm{Cu^{2+}}]_i = 0{,}10\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$

Les solides n'apparaissent pas dans le quotient de réaction :

$$Q_{r,i} = \frac{[\mathrm{Al^{3+}}]_i^2}{[\mathrm{Cu^{2+}}]_i^3} = \frac{0{,}10^2}{0{,}10^3}$$

$$Q_{r,i} = 10$$

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Oublier les exposants (nombres stœchiométriques 2 et 3) ou faire figurer $\mathrm{Cu\,(s)}$ et $\mathrm{Al\,(s)}$ dans l'expression.

COMPRENDRE
Le quotient de réaction est sans unité : chaque concentration est implicitement divisée par $c^\circ = 1\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.

II.4.2 Montrer, avec le critère d'évolution spontanée, que le sens d'évolution est cohérent avec le fonctionnement de la pile.

Données utiles $K = 10^{20}$; $Q_{r,i} = 10$ (II.4.1)

$Q_{r,i} = 10 < K = 10^{20}$: le système évolue spontanément dans le sens direct de l'équation.

Dans ce sens, Al est oxydé et cède des électrons, $\mathrm{Cu^{2+}}$ est réduit et en capte : les électrons vont bien de l'aluminium vers le cuivre dans le circuit.

Sens direct : l'aluminium est la borne négative et le cuivre la borne positive, en accord avec la mesure de la partie I.

MÉTHODE
Comparer $Q_{r,i}$ à K : si $Q_{r,i} < K$, évolution en sens direct ; si $Q_{r,i} > K$, en sens inverse ; si $Q_{r,i} = K$, le système est à l'équilibre.

III.1 Calculer la quantité d'électricité Q échangée pendant 1 h 30 min.

Données utiles $I = 40$ mA ; $\Delta t = 1$ h 30 min

L'intensité est constante : $Q = I \times \Delta t$, avec $I = 40 \times 10^{-3}$ A et $\Delta t = 90 \times 60 = 5\,400$ s.

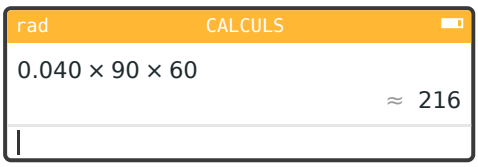
$$Q = 40 \times 10^{-3} \times 5\,400 = 216 \text{ C}$$

$\boxed{Q = 2{,}2 \times 10^{2} \text{ C}}$

PIÈGE
Laisser l'intensité en mA ou la durée en minutes : le coulomb est l'ampère-seconde.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme $I = 40$ mA. On garde 216 C, non arrondi, pour les calculs suivants.

À LA CALCULATRICE



III.2 Calculer la quantité de matière d'électrons n_e échangée pendant cette durée.

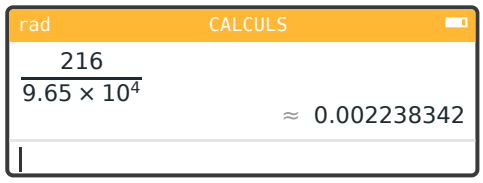
Données utiles $F = 9{,}65 \times 10^{4}$ C · mol^{-1} ; $Q = 216$ C (III.1)

Une mole d'électrons porte, en valeur absolue, la charge F : $Q = n_e \times F$, donc $n_e = \dfrac{Q}{F}$.

$$n_e = \frac{216}{9{,}65 \times 10^{4}}$$

$\boxed{n_e = 2{,}2 \times 10^{-3} \text{ mol}}$

À LA CALCULATRICE



III.3 Donner la relation entre n_e et n_{Al}, quantité de matière d'aluminium ayant disparu.

D'après $\text{Al(s)} = \text{Al}^{3+}\text{(aq)} + 3\,\text{e}^{-}$, chaque atome d'aluminium oxydé libère 3 électrons : $n_e = 3\,n_{\text{Al}}$.

$\boxed{n_{\text{Al}} = \dfrac{n_e}{3}}$

PIÈGE
Utiliser le nombre stœchiométrique 2 de l'équation bilan. C'est la demi-équation de l'aluminium, avec ses 3 électrons, qui relie n_e à n_{Al}.

III.4 Calculer la perte de masse de l'électrode d'aluminium.

Données utiles $M(\text{Al}) = 27$ g · mol^{-1} ; $n_e = 2{,}24 \times 10^{-3}$ mol (III.2) ; $n_{\text{Al}} = n_e/3$ (III.3)

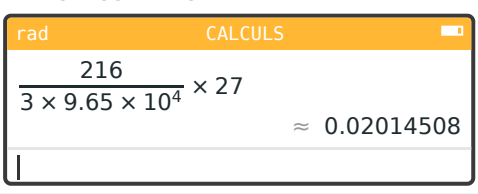
$$m_{\text{Al}} = n_{\text{Al}} \times M(\text{Al}) = \frac{n_e}{3} \times M(\text{Al}) = \frac{I\,\Delta t}{3F} \times M(\text{Al})$$

$$m_{\text{Al}} = \frac{216}{3 \times 9{,}65 \times 10^{4}} \times 27 = 2{,}0 \times 10^{-2} \text{ g}$$

L'électrode d'aluminium perd $m_{\text{Al}} = 2{,}0 \times 10^{-2}$ g, soit 20 mg.

MÉTHODE
Chaîne à retenir pour toute pile ou électrolyse : $Q = I\,\Delta t$, puis $n_e = Q/F$, puis la demi-équation pour passer à l'espèce, enfin $m = n \times M$.

À LA CALCULATRICE



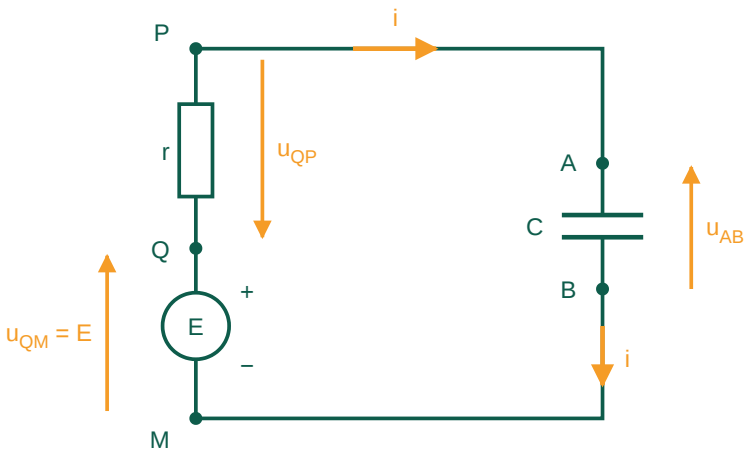
IV.1 Recopier le schéma en représentant le sens du courant pendant la charge du condensateur et les flèches des tensions u_{QM}, u_{QP} et u_{AB}.

Le courant sort du générateur par sa borne positive Q (pointe de la flèche E) : il traverse r de Q vers P, arrive sur l'armature A et revient par B vers M.

La flèche d'une tension u_{XY} part de Y et pointe vers X : u_{QM} pointe vers Q, u_{QP} pointe vers Q, u_{AB} pointe vers A.

Courant de Q vers P, puis de P vers A et de B vers M ; flèches tracées sur le schéma.

PIÈGE
Inverser une flèche. u_{QP} va de P vers Q : elle est opposée au sens du courant dans r (convention récepteur), donc $u_{QP} = r\,i$ est positive.



IV.1 · Charge du condensateur : sens du courant et flèches des tensions

IV.2 Quel est le signe de la charge prise par l'armature A du condensateur au cours de la charge ?

L'armature A est reliée, à travers r, à la borne positive Q du générateur. Le courant arrive sur A : des électrons quittent cette armature.

L'armature A porte une charge positive : $q_A > 0$ (et l'armature B porte la charge opposée $-q_A$).

COMPRENDRE
Aucune charge ne traverse l'isolant du condensateur : les électrons arrachés à A sont amenés par le générateur sur B, qui se charge négativement.

IV.3 La charge q_A est proportionnelle à la tension u_{AB}. Quels sont le nom et l'unité du coefficient de proportionnalité ?

$q_A = C \times u_{AB}$, avec q_A en coulombs et u_{AB} en volts.

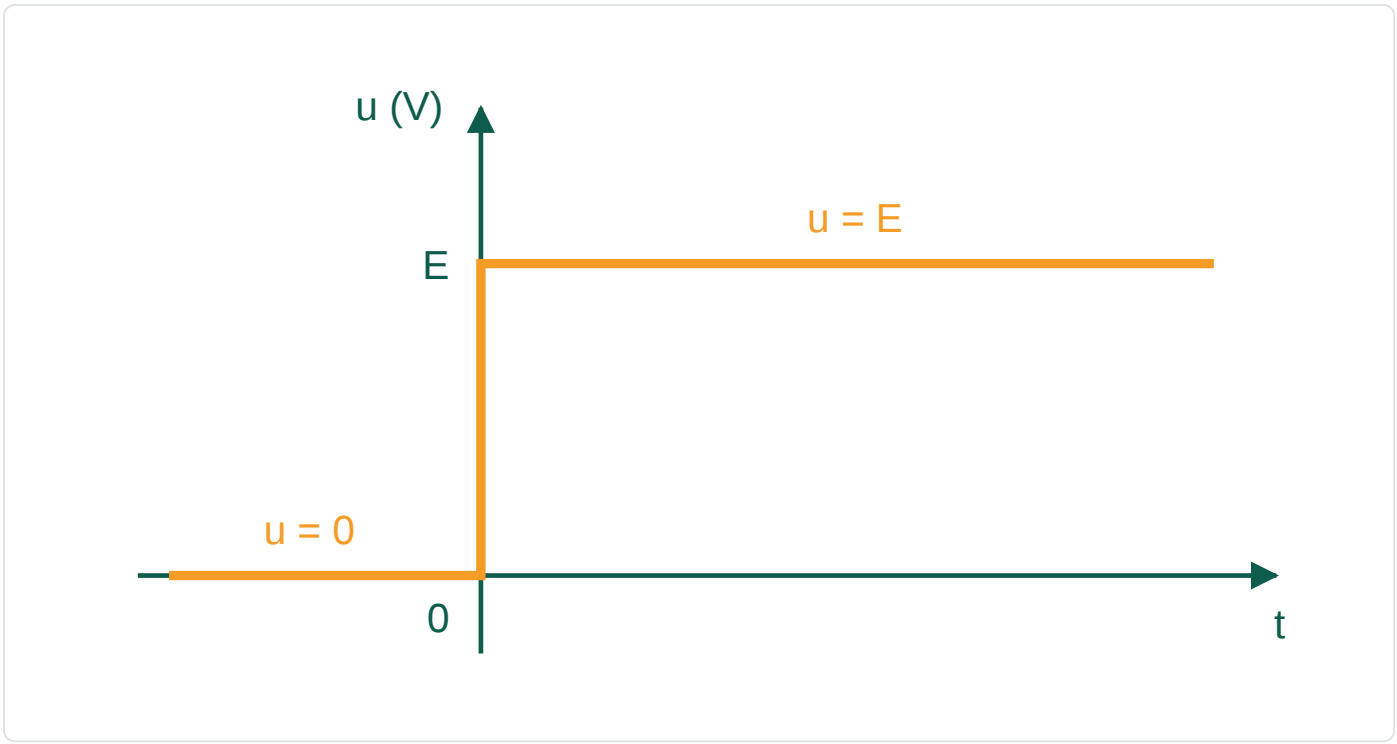
Le coefficient C est la capacité du condensateur ; elle s'exprime en farads (symbole F).

PIÈGE
Confondre le farad, unité de capacité, avec le faraday $F = 9{,}65 \times 10^4\ \text{C} \cdot \text{mol}^{-1}$ de la partie III : même lettre, grandeurs sans rapport.

V.1 À l'aide d'un graphique, expliquer ce qu'est un échelon de tension E.

La tension appliquée au circuit est nulle avant la date $t = 0$, puis elle passe instantanément à la valeur E et garde ensuite cette valeur constante.

Échelon de tension : passage brutal de la tension de 0 à la valeur constante E.



V.1 · Échelon de tension : la tension passe de 0 à E à la date t = 0

V.2.1 Dans l'équation différentielle $E = r\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_{AB}}{\mathrm{d}t} + u_{AB}$, que représente la grandeur C ?

C est la capacité du condensateur, en farads.

COMPRENDRE
L'équation vient de la loi des mailles $E = r\,i + u_{AB}$, avec $i = \dfrac{\mathrm{d}q_A}{\mathrm{d}t} = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_{AB}}{\mathrm{d}t}$.

V.2.2 La solution de l'équation différentielle est $u_{AB} = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$. En déduire l'expression de la constante τ.

On dérive la solution : $\dfrac{\mathrm{d}u_{AB}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{\tau}\,e^{-t/\tau}$.

On reporte dans l'équation différentielle :

$$r\,C\,\frac{E}{\tau}\,e^{-t/\tau} + E - E\,e^{-t/\tau} = E \quad \text{soit} \quad E\,e^{-t/\tau}\left(\frac{r\,C}{\tau} - 1\right) = 0$$

Cette égalité doit être vraie à toute date t, or $E\,e^{-t/\tau}$ ne s'annule jamais : il faut $\dfrac{r\,C}{\tau} - 1 = 0$.

$\tau = r\,C$

PIÈGE
Erreur de signe en dérivant : la dérivée de $-e^{-t/\tau}$ est $+\dfrac{1}{\tau}\,e^{-t/\tau}$.

MÉTHODE
Pour identifier une constante : dériver la solution proposée, la reporter dans l'équation différentielle, factoriser l'exponentielle, puis annuler son coefficient.

V.2.3 Quelle est l'unité de τ ? Le vérifier par analyse dimensionnelle. Quel nom donne-t-on à τ ?

τ s'exprime en secondes.

Loi d'Ohm $u = r\,i$: r est une tension divisée par une intensité, $[r] = \dfrac{[U]}{[I]}$.

Condensateur : $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, donc C est une intensité multipliée par une durée et divisée par une tension, $[C] = \dfrac{[I]\,[T]}{[U]}$.

$$[r\,C] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[I]\,[T]}{[U]} = [T]$$

$\tau = r\,C$ est homogène à une durée, en secondes : c'est la constante de temps du circuit (temps caractéristique de la charge).

COMPRENDRE
Vérification rapide par les unités : $\Omega = \mathrm{V}\cdot\mathrm{A}^{-1}$ et $\mathrm{F} = \mathrm{C}\cdot\mathrm{V}^{-1} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{V}^{-1}$, donc $\Omega\cdot\mathrm{F} = \mathrm{s}$.

V.2.4 Quelles valeurs, écrites en fonction de E, prend la tension u_{AB} aux dates $t = \tau$, 3τ, 5τ et 10τ ?

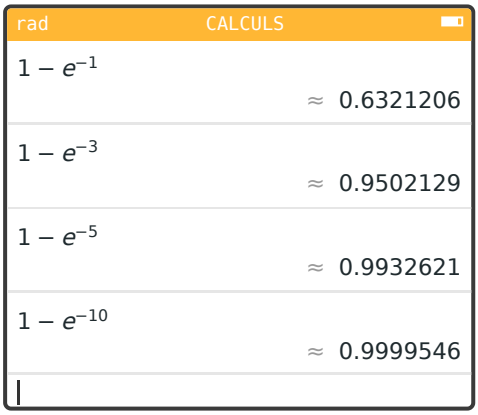
À la date $t = k\,\tau$: $u_{AB} = E\left(1 - e^{-k}\right)$.

- $t = \tau$: $u_{AB} = E\,(1 - e^{-1}) = 0{,}63\,E$
- $t = 3\tau$: $u_{AB} = E\,(1 - e^{-3}) = 0{,}95\,E$
- $t = 5\tau$: $u_{AB} = E\,(1 - e^{-5}) = 0{,}993\,E$
- $t = 10\tau$: $u_{AB} = E\,(1 - e^{-10}) = 0{,}99995\,E \approx E$

u_{AB} vaut $0{,}63\,E$; $0{,}95\,E$; $0{,}993\,E$; puis pratiquement E.

COMPRENDRE
Repères à connaître : 63 % de la tension finale à τ, et charge considérée comme terminée à 5τ (plus de 99 %).

À LA CALCULATRICE



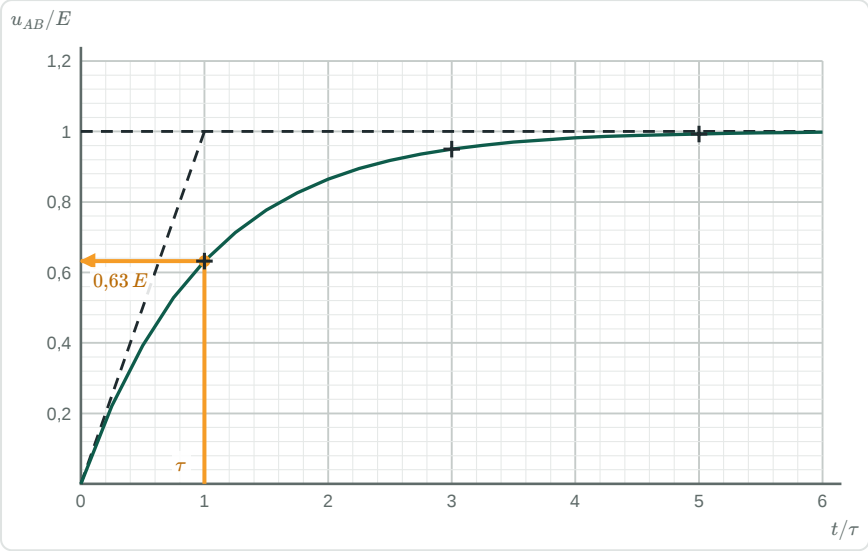
V.2.5 À partir de ces résultats, dessiner l'allure de la courbe $u_{AB} = f(t)$ de $t = 0$ à environ $t = 6\tau$.

Données utiles $0{,}63\,E$ à τ ; $0{,}95\,E$ à 3τ ; $0{,}993\,E$ à 5τ (V.2.4)

La courbe part de l'origine ($u_{AB} = 0$ à $t = 0$), croît de moins en moins vite en passant par les trois points calculés, et tend vers l'asymptote horizontale $u_{AB} = E$.

Courbe croissante de 0 vers E, passant par $0{,}63\,E$ à $t = \tau$ et confondue avec l'asymptote à partir de 5τ environ.

MÉTHODE
La tangente à l'origine coupe l'asymptote $u_{AB} = E$ à la date $t = \tau$: la tracer en premier guide le dessin de la courbe.



V.2.5 · Allure de la charge : la tension tend vers E

VI.1 Quelle est l'énergie maximale emmagasinée dans le condensateur ?

Données utiles $C = 100$ mF ; tension de charge $E = 1{,}8$ V

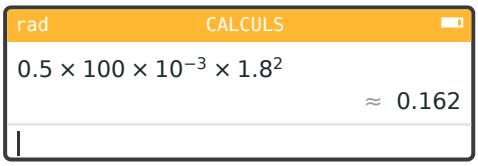
Le sujet note E à la fois la tension et l'énergie : on note ici W l'énergie.
Le condensateur chargé a pour tension $u_{AB} = E$:

$$W = \frac{1}{2} C E^2 = \frac{1}{2} \times 100 \times 10^{-3} \times 1{,}8^2 = 0{,}162 \text{ J}$$

$W = 0{,}16$ J

PIÈGE
Oublier de convertir 100 mF en 0,100 F, ou oublier le carré sur la tension.

À LA CALCULATRICE



VI.2 De quelle hauteur h pourrait monter le solide si le transfert d'énergie se faisait avec un rendement de 100 % ?

Données utiles $m = 100$ g ; $g = 10$ m · s^{-2} ; $W = 0{,}162$ J (VI.1)

Le solide monte à vitesse constante : son énergie cinétique ne varie pas, seule son énergie potentielle de pesanteur augmente, de $m\,g\,h$.

Avec un rendement de 100 %, toute l'énergie du condensateur est transférée au solide : $m\,g\,h = W$, donc

$$h = \frac{W}{m\,g} = \frac{C\,E^2}{2\,m\,g} = \frac{0{,}162}{0{,}100 \times 10}$$

$h = 0{,}16$ m, soit 16 cm.

PIÈGE
Laisser la masse en grammes : $m = 0{,}100$ kg. Avec 100 g, on trouverait une hauteur mille fois trop petite.

COMPRENDRE
En réalité le rendement est inférieur à 100 % (effet Joule, frottements) : la hauteur atteinte serait plus faible que 16 cm.

À LA CALCULATRICE

