Mouvements plans

Bac S 2004 Amérique du Sud (ancien programme) · Exercice 4 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 Vrai ou faux : le vecteur accélération $\vec{a}_G$ du centre d'inertie G du projectile ne dépend pas des conditions initiales.

Système {projectile}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen. Sans résistance de l'air, la seule force est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $m\,\vec{a}_G = m\,\vec{g}$, donc $\vec{a}_G = \vec{g}$.

Le champ $\vec{g}$ est uniforme : $\vec{a}_G$ ne contient ni V_0, ni α, ni la position de départ.

VRAI : $\vec{a}_G = \vec{g}$, quelles que soient les conditions initiales.

COMPRENDRE

La masse se simplifie : l'accélération est aussi indépendante de m. Les conditions initiales n'interviennent qu'ensuite, comme constantes d'intégration dans la vitesse et la position.

1.2 Vrai ou faux : le projeté de G sur l'axe vertical Oz est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

L'axe Oz est orienté vers le haut et $\vec{g}$ vers le bas : $a_z = -g$.

Comme $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$, par intégration : $v_z = -g\,t + V_0 \sin\alpha$ (à $t = 0$, $v_z = V_0 \sin\alpha$).

La vitesse v_z varie avec le temps : le projeté sur Oz a un mouvement rectiligne uniformément varié.

FAUX : $v_z = -g\,t + V_0 \sin\alpha$ n'est pas constante.

COMPRENDRE

C'est le projeté sur l'axe horizontal Ox qui est en mouvement uniforme : $a_x = 0$, donc $v_x = V_0 \cos\alpha$ reste constante.

1.3 Vrai ou faux : la trajectoire de G est parabolique quelle que soit la valeur de α.

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \qquad \vec{v}_G \begin{cases} v_x = V_0 \cos\alpha \\ v_z = -g\,t + V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OG} \begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)\,t \\ z = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + (V_0 \sin\alpha)\,t \end{cases}$$

(constantes de position nulles car G est en O à $t = 0$).

Si $\cos\alpha \neq 0$: $t = \dfrac{x}{V_0 \cos\alpha}$, d'où

$$z = -\frac{g}{2\,V_0^2 \cos^2\alpha}\,x^2 + x \tan\alpha$$

C'est l'équation d'une parabole.

Si $\alpha = 90^\circ$ (tir vertical) : $x = 0$ à tout instant. G reste sur l'axe Oz, sa trajectoire est un segment de droite vertical.

FAUX : la trajectoire est une parabole sauf pour un tir vertical ($\alpha = \pm 90^\circ$), où elle est rectiligne.

PIÈGE

Établir l'équation de la parabole et conclure « vrai ». La division par $\cos\alpha$ suppose $\cos\alpha \neq 0$: « quelle que soit la valeur » invite à chercher le cas particulier.

MÉTHODE

Équation de trajectoire : 1) $\vec{a}_G = \vec{g}$; 2) deux intégrations avec les conditions initiales ; 3) exprimer t en fonction de x et le reporter dans z.

1.4 Vrai ou faux : pour un lancer horizontal d'une hauteur H au-dessus du sol, l'abscisse du point de chute est $x = V_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

Données utiles équations horaires (1.3) ; le sol est à la cote $z = -H$

Vitesse initiale horizontale : $\alpha = 0$, donc $x = V_0\,t$ et $z = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2$.

Le projectile touche le sol à la date t_S telle que $z = -H$:

$-H = -\dfrac{1}{2}\,g\,t_S^2$, soit $t_S = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$ (seule la racine positive convient).

Abscisse du point de chute : $x_S = V_0\,t_S$.

VRAI : $x_S = V_0\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$

PIÈGE
Écrire $z = H$ ou $z = 0$ au sol. L'origine O est le point de lancement et l'axe Oz monte : le sol est à la cote $z = -H$.

COMPRENDRE
La durée de chute t_S ne dépend pas de V_0 : elle est la même que pour une chute libre sans vitesse initiale depuis la hauteur H.

2.1 Vrai ou faux : la constante de gravitation universelle G s'exprime en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

La force gravitationnelle a pour valeur $F = \dfrac{G\,m\,M_T}{(R_T+h)^2}$, donc $G = \dfrac{F\,(R_T+h)^2}{m\,M_T}$.

Une force est une masse multipliée par une accélération : $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

Unité de G : $\dfrac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\times\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} = \mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

FAUX : G s'exprime en $\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$; le $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ est l'unité d'une accélération.

MÉTHODE
Unité d'une constante : l'isoler dans une relation connue, remplacer chaque grandeur par son unité, puis décomposer le newton en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

2.2 Vrai ou faux : le vecteur accélération $\vec{a}_G$ du centre d'inertie du satellite est centripète.

Système {satellite} ; référentiel géocentrique supposé galiléen ; seule force : la force gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par la Terre.

Deuxième loi de Newton : $\vec{F} = m\,\vec{a}_G$, donc $\vec{a}_G = \dfrac{\vec{F}}{m}$: $\vec{a}_G$ a la direction et le sens de $\vec{F}$.

Or $\vec{F}$ est attractive : elle est portée par la droite joignant le satellite au centre de la Terre et dirigée vers ce centre, qui est aussi le centre de la trajectoire circulaire.

VRAI : $\vec{a}_G$ est dirigé vers le centre de la trajectoire, il est centripète.

COMPRENDRE
Centripète signifie « dirigé vers le centre de la trajectoire ». L'accélération n'a alors aucune composante tangentielle : la valeur de la vitesse ne change pas, ce qui est cohérent avec un mouvement uniforme.

2.3 Vrai ou faux : la vitesse du satellite est donnée par $V = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{R_T + h}}$.

Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire dirigé du satellite vers le centre de la Terre.
Le rayon de l'orbite est $R_T + h$.

Force : $\vec{F} = \dfrac{G\,m\,M_T}{(R_T + h)^2}\,\vec{n}$.

Mouvement circulaire uniforme : $\vec{a}_G = \dfrac{V^2}{R_T + h}\,\vec{n}$.

Deuxième loi de Newton, $\vec{F} = m\,\vec{a}_G$, projetée sur $\vec{n}$:

$$\frac{G\,m\,M_T}{(R_T + h)^2} = m\,\frac{V^2}{R_T + h} \quad \text{soit} \quad V^2 = \frac{G\,M_T}{R_T + h}$$

VRAI : $V = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{R_T + h}}$

PIÈGE
Prendre h pour rayon de l'orbite. Les distances se comptent depuis le centre de la Terre : le rayon est $R_T + h$, dans la force comme dans l'accélération.

2.4 Vrai ou faux : à l'altitude $h = 12\,800$ km, la période de révolution du satellite vaut $2{,}64 \times 10^4$ s.

Données utiles $R_T = 6380$ km ; $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ S.I. ; expression de V (2.3)

En une période T, le satellite parcourt la circonférence $2\pi\,(R_T + h)$ à la vitesse constante V :

$$T = \frac{2\pi\,(R_T + h)}{V} = 2\pi\,(R_T + h)\sqrt{\frac{R_T + h}{G\,M_T}}, \text{ soit } T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G\,M_T}}$$

Avec $R_T + h = 6380 + 12\,800 = 19\,180$ km $= 1{,}918 \times 10^7$ m :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(1{,}918 \times 10^7)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}} = 2{,}64 \times 10^4 \text{ s}$$

VRAI : $T = 2{,}64 \times 10^4$ s, valeur identique à celle annoncée (environ 7 h 20 min).

PIÈGE
Laisser les distances en kilomètres, ou oublier d'ajouter R_T à h. Avec G en unités S.I., le rayon de l'orbite doit être en mètres.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme G et M_T. En élevant au carré, on retrouve la troisième loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{(R_T + h)^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_T}$.

À LA CALCULATRICE

