Etude d'un circuit RC - Principe de fonctionnement d'une minuterie

Bac S 2005 Polynésie (ancien programme) · Exercice 2 **7,5 points** **Durée conseillée 1 h 31**

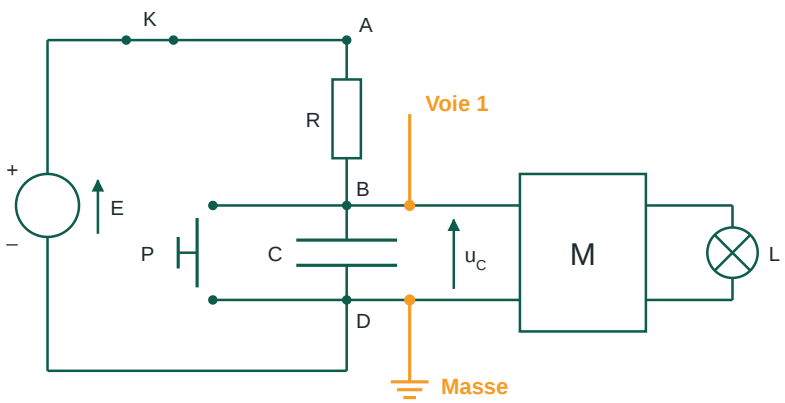
1 Partie I. Indiquer sur le schéma du document 1 les branchements (voie 1 et masse) permettant de visualiser u_C à l'oscilloscope à mémoire.

La tension $u_C = u_{BD}$ est repérée par une flèche dont la pointe est en B : la voie 1 se branche en B et la masse en D.

Voie 1 au point B, masse au point D.

COMPRENDRE

Un oscilloscope affiche la tension entre sa voie et sa masse, soit $V_{\text{voie}} - V_{\text{masse}}$. La voie se place donc à la pointe de la flèche tension, la masse à son origine.



1 · Document 1 complété : la voie 1 en B, la masse en D

2 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ est de la forme $u_C(t) + RC\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = E$.

K fermé, P relâché : le générateur, le conducteur ohmique et le condensateur sont en série. On oriente le courant i de A vers B.

Loi des mailles : $E = u_R + u_C$.

Loi d'Ohm : $u_R = R\,i$.

Condensateur : $q = C\,u_C$ et $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, donc, C étant constante, $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

En remplaçant : $E = RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$.

$$u_C(t) + RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = E$$

PIÈGE

Sans orientation du courant, les signes ne sont pas justifiés. Ici i arrive sur l'armature reliée à B, et u_C pointe vers B : c'est la convention récepteur, d'où $i = +\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

MÉTHODE

Toujours trois étapes : loi des mailles, loi d'Ohm pour u_R, puis $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ pour éliminer l'intensité. Il ne reste que u_C et sa dérivée.

3 a) En vérifiant que $u_C(t) = A\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ est solution, montrer que $A = E$ et $\tau = RC$. b) Quelle est la valeur de u_C en régime permanent ? c) Nommer la constante τ et donner son unité par analyse dimensionnelle.

Données utiles $E = 30$ V

a) $u_C = A - A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ donc $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{A}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

On reporte dans l'équation différentielle :

$$A - A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + RC\,\frac{A}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = E \quad \text{soit} \quad A + A\left(\frac{RC}{\tau} - 1\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} = E$$

Cette égalité doit être vraie à chaque instant : le terme qui dépend du temps doit être nul, donc $\dfrac{RC}{\tau} - 1 = 0$, et il reste $A = E$.

Donc $A = E$ et $\tau = RC$; ainsi $u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/RC}\right)$.

b) En régime permanent u_C ne varie plus : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$, et l'équation différentielle donne $u_C = E = 30$ V.

c) τ est la constante de temps du circuit.

Loi d'Ohm : $[R] = \dfrac{[U]}{[I]}$. Avec $q = C\,u_C$ et $q = I\,\Delta t$: $[C] = \dfrac{[I]\,[T]}{[U]}$.

$$[RC] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[I]\,[T]}{[U]} = [T]$$

$A = E$ et $\tau = RC$; en régime permanent $u_C = E = 30$ V ; τ, constante de temps, s'exprime en secondes.

PIÈGE
Au a), il ne suffit pas de poser $A = E$ et $\tau = RC$ puis de constater que cela fonctionne : il faut montrer que l'égalité, valable à tout instant, impose ces deux valeurs.

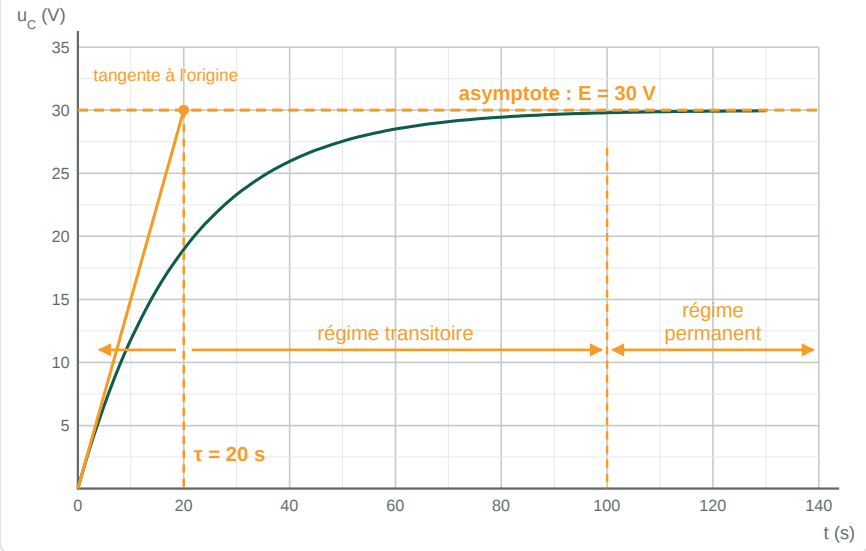
COMPRENDRE
Autre lecture du b) : quand t devient très grand, $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ tend vers 0 et u_C tend vers E. Le condensateur chargé ne laisse plus passer de courant.

4 Faire apparaître sur le graphe du document 2, sans justification : la tension E, la constante τ, les régimes permanent et transitoire.

Voir le document 2 complété : E est l'ordonnée de l'asymptote horizontale ; τ est l'abscisse du point où la tangente à l'origine coupe cette asymptote ; le régime permanent commence lorsque u_C ne varie pratiquement plus (vers 5τ).

$E = 30$ V (asymptote) ; $\tau \approx 20$ s ; régime transitoire puis régime permanent à partir de 100 s environ.

MÉTHODE
Deux façons de lire τ : la tangente à l'origine coupe l'asymptote à $t = \tau$, ou bien $u_C(\tau) = 0{,}63\,E$, ici 19 V. La seconde est plus précise, une tangente étant délicate à tracer.



4 · Document 2 complété

5 Question 5 : calculer τ. Question 6 : a) exprimer la date t_0 à laquelle u_C atteint U_ℓ en fonction de U_ℓ, E et τ ; b) calculer t_0 et vérifier sur le graphe ; c) pourquoi choisir t_0 très supérieur à τ n'aurait-il pas été judicieux ?

Données utiles $R = 100\ \text{k}\Omega$; $C = 200\ \mu\text{F}$; $E = 30\ \text{V}$; $U_\ell = 20\ \text{V}$

5. $\tau = RC = 100 \times 10^3 \times 200 \times 10^{-6} = 20{,}0\ \text{s}$

6. a) À la date t_0 : $u_C(t_0) = U_\ell$, soit $E\left(1 - \text{e}^{-t_0/\tau}\right) = U_\ell$.

$\text{e}^{-t_0/\tau} = 1 - \dfrac{U_\ell}{E} = \dfrac{E - U_\ell}{E}$, d'où $-\dfrac{t_0}{\tau} = \ln\left(\dfrac{E - U_\ell}{E}\right)$ et

$$t_0 = \tau \ln\left(\frac{E}{E - U_\ell}\right)$$

6. b) $t_0 = 20{,}0 \times \ln\left(\dfrac{30}{30 - 20}\right) = 20{,}0 \times \ln 3 = 22\ \text{s}$

Sur le graphe, la courbe atteint $u_C = 20\ \text{V}$ à une date légèrement supérieure à 20 s : le résultat est validé.

6. c) Pour $t \gg \tau$, la courbe est presque horizontale : u_C ne varie quasiment plus. Si U_ℓ était proche de E, le moindre écart sur U_ℓ ou sur E changerait beaucoup la date t_0 : la durée d'allumage serait mal définie et peu reproductible.

$$\tau = 20{,}0\ \text{s} \ ; \ t_0 = \tau \ln\left(\frac{E}{E - U_\ell}\right) = 22\ \text{s}$$

PIÈGE
Garder R en kilohms ou C en microfarads. Il faut des ohms et des farads pour obtenir des secondes : $100\ \text{k}\Omega = 100 \times 10^3\ \Omega$ et $200\ \mu\text{F} = 200 \times 10^{-6}$ F.

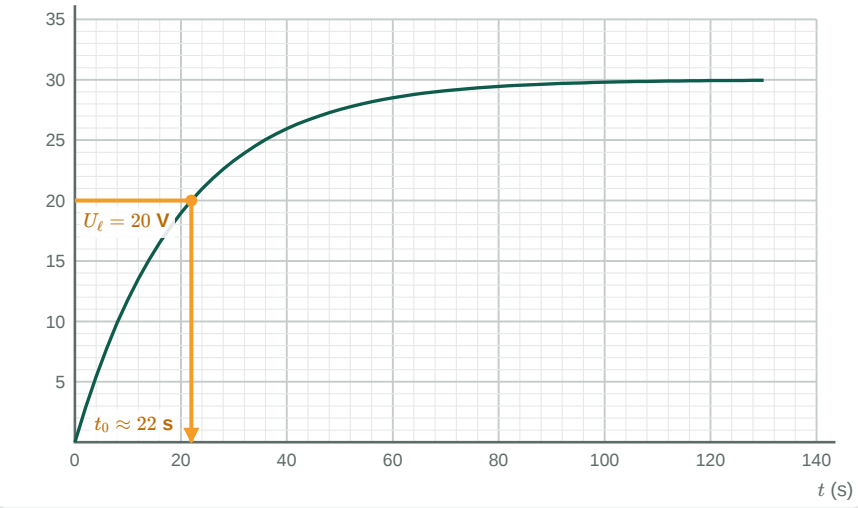
COMPRENDRE
E et U_ℓ ne sont donnés qu'avec deux chiffres significatifs : t_0 s'écrit 22 s, pas 21,97 s. Pour τ, les données en comptent trois.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$100 \times 10^3 \times 200 \times 10^{-6}$ ≈ 20

$20.0 \times \ln\left(\dfrac{30}{30 - 20}\right)$ ≈ 21.97225



5 · Document 2 : lecture de la date t_0 pour $u_C = U_\ell = 20\ \text{V}$

7 Quel(s) paramètre(s) du montage peut-on modifier, sans changer le générateur, pour augmenter la durée d'allumage ? Avec $C = 200\ \mu\text{F}$, quelle valeur donner à R pour obtenir une constante de temps d'une minute ?

Données utiles $C = 200\ \mu\text{F}$; $\tau = 60$ s ; t_0 (Q6)

$t_0 = RC \ln\left(\dfrac{E}{E - U_\ell}\right)$: E est imposée par le générateur et U_ℓ par le composant M. La durée t_0 est proportionnelle à $\tau = RC$: on l'augmente en augmentant la résistance R ou la capacité C.

$\tau = RC$ donc $R = \dfrac{\tau}{C} = \dfrac{60}{200 \times 10^{-6}} = 3{,}0 \times 10^5\ \Omega$

Augmenter R ou C ; pour $\tau = 1$ min : $R = 3{,}0 \times 10^5\ \Omega = 3{,}0 \times 10^2\ \text{k}\Omega$

PIÈGE
Laisser la minute telle quelle : τ doit être en secondes, soit 60 s. Avec $\tau = 1$, on trouverait $5\ \text{k}\Omega$, soit soixante fois trop peu.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{60}{200 \times 10^{-6}}$ ≈ 300000

8 On appuie sur le bouton poussoir. Que vaut la tension aux bornes du condensateur ? La comparer à U_ℓ. Que se passe-t-il pour la lampe : a) si elle est déjà allumée ; b) si elle est éteinte ?

Données utiles $U_\ell = 20$ V

Le bouton poussoir fermé est un fil qui relie directement B et D : le condensateur est court-circuité, il se décharge instantanément et $u_C = 0$ V.

Donc $u_C < U_\ell$: le composant M commande l'allumage de la lampe.

a) La lampe déjà allumée reste allumée. Quand on relâche P, la charge repart de $u_C = 0$: la minuterie est remise à zéro pour une nouvelle durée t_0.

b) La lampe éteinte s'allume. Quand on relâche P, le condensateur se charge et la lampe s'éteint au bout de la durée t_0.

$u_C = 0$ V $< U_\ell$: a) la lampe reste allumée (durée relancée) ; b) la lampe s'allume.

COMPRENDRE
C'est le fonctionnement d'une minuterie d'escalier : chaque appui vide le condensateur et relance le compte à rebours. Tant que P reste enfoncé, u_C reste nulle et la lampe ne peut pas s'éteindre.

1 Partie II. À partir de l'équation différentielle, donner la relation entre la dérivée $\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$ et la tension $u_C(t)$.

Données utiles $E = 30$ V ; $\tau = RC = 20{,}0$ s (Q5)

On isole la dérivée dans $u_C + RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = E$:

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{E - u_C(t)}{RC}$$

$\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E - u_C(t)}{RC} = \dfrac{30 - u_C(t)}{20{,}0}$, en $\mathrm{V \cdot s^{-1}}$ avec u_C en volts.

COMPRENDRE
Contrôle avec le tableau : à $t = 0$, $u_C = 0$ et la relation donne $30 \div 20{,}0 = 1{,}50\ \mathrm{V \cdot s^{-1}}$, la valeur déjà inscrite dans la première colonne.

2 Partie II. Avec la relation d'Euler $u_C(t + \Delta t) = u_C(t) + \dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\Delta t$, compléter dans le tableau du document 3 les colonnes des dates $t = 2$ s et $t = 4$ s.

Données utiles $\Delta t = 2$ s ; $u_C(0) = 0$ V ; $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = 1{,}50\ \mathrm{V \cdot s^{-1}}$; relation de la question II.1

Date $t = 2$ s

$$u_C(2) = u_C(0) + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) \times \Delta t = 0 + 1{,}50 \times 2 = 3{,}00\ \mathrm{V}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(2) = \frac{30 - 3{,}00}{20{,}0} = 1{,}35\ \mathrm{V \cdot s^{-1}}$$

Date $t = 4$ s

$$u_C(4) = u_C(2) + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(2) \times \Delta t = 3{,}00 + 1{,}35 \times 2 = 5{,}70\ \mathrm{V}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(4) = \frac{30 - 5{,}70}{20{,}0} = 1{,}22\ \mathrm{V \cdot s^{-1}}$$

$u_C(2) = 3{,}00$ V et $1{,}35\ \mathrm{V \cdot s^{-1}}$; $u_C(4) = 5{,}70$ V et $1{,}22\ \mathrm{V \cdot s^{-1}}$

COMPRENDRE
Vérification par la colonne suivante : $5{,}70 + 1{,}215 \times 2 = 8{,}13$ V, en accord avec le 8,14 V du tableau, à l'arrondi près.

MÉTHODE
Chaque colonne se remplit en deux temps : la nouvelle tension à partir de la colonne précédente (tension et dérivée), puis la nouvelle dérivée à partir de cette tension. On recommence pour la colonne suivante.

t (s)	0	2	4	6	8	10	12	…	20
u_C (V)	0	3,00	5,70	8,14	10,3	12,3	14,1	…	19,6
du_C/dt (V/s)	1,50	1,35	1,22	1,09	0,99	0,89	0,80	…	0,52

2 · Document 3 complété (valeurs calculées en orange)

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$0 + 1.50 \times 2$ ≈ 3

$\frac{30 - 3.00}{20.0}$ ≈ 1.35

$3.00 + 1.35 \times 2$ ≈ 5.7

$\frac{30 - 5.70}{20.0}$ ≈ 1.215

3 Partie II. Tracer sur le document 4 la partie du graphe $u_C(t)$ correspondant au tableau. Que constatez-vous ?

Données utiles valeurs du tableau du document 3 (Q II.2)

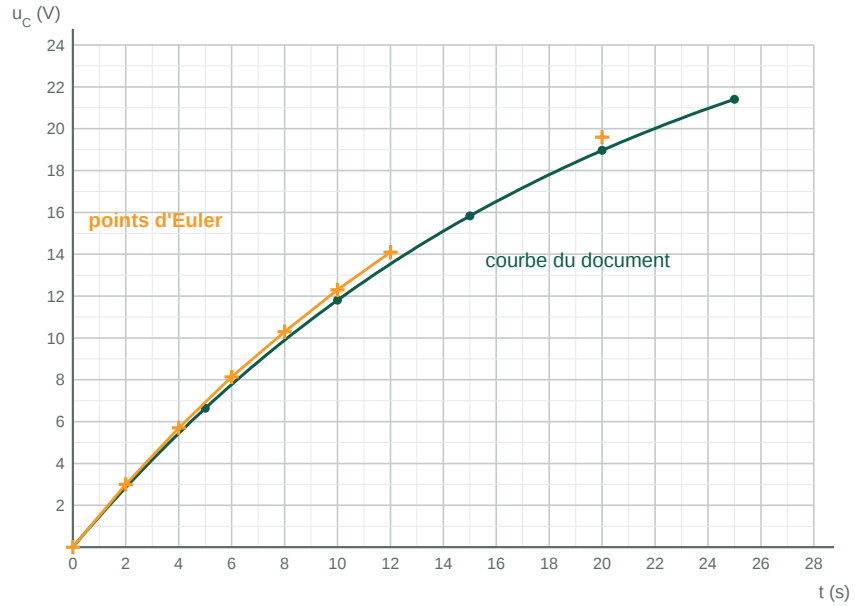
On place les points du tableau : (0 ; 0), (2 ; 3,00), (4 ; 5,70), (6 ; 8,14), (8 ; 10,3), (10 ; 12,3), (12 ; 14,1) et (20 ; 19,6).

Les points obtenus par la méthode d'Euler sont proches de la courbe du document, mais situés un peu au-dessus, et l'écart grandit au fil des calculs : environ 0,5 V à $t = 12$ s.

La méthode d'Euler donne une courbe voisine de la courbe du document, avec des valeurs légèrement supérieures.

COMPRENDRE

Sur chaque pas, on avance avec la pente du début du pas. Or la pente réelle diminue pendant ces 2 s : la tension calculée est trop grande, et les erreurs s'ajoutent d'un pas au suivant.



3 · Document 4 complété : points de la méthode d'Euler et courbe du document

4 Partie II. Quelle modification apporter à la valeur du pas Δt pour améliorer la précision de la méthode d'Euler ? Quel en serait l'inconvénient ?

Il faut diminuer le pas Δt : sur une durée plus courte, la pente varie moins et l'approximation est meilleure.

Inconvénient : pour couvrir la même durée, le nombre de calculs augmente. Avec $\Delta t = 0{,}2$ s, il faudrait cent étapes au lieu de dix pour atteindre 20 s.

Diminuer le pas Δt ; inconvénient : davantage de calculs pour une même durée.

COMPRENDRE
Avec un tableur ou un programme, ce nombre de calculs n'est plus un obstacle : on choisit en pratique un pas très petit devant τ.