Oscillateur mécanique horizontal

Bac S 2007 Inde (Pondichéry) (ancien programme) · Exercice 4 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1.1 (III.1.a) Donner l'expression vectorielle de la force de rappel $\vec{F}$ du ressort en fonction de l'abscisse x de G et du vecteur unitaire $\vec{i}$.

À l'équilibre G est en O : l'allongement du ressort est égal à l'abscisse x. La force de rappel est proportionnelle à cet allongement et de sens opposé.

$$\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ ». Si $x > 0$ le ressort est étiré et tire le mobile vers O ; si $x < 0$ il est comprimé et le repousse vers O.

COMPRENDRE
L'oscillateur masse-ressort ne figure plus au programme actuel de spécialité. L'exercice reste un bon entraînement à la deuxième loi de Newton, à l'analyse dimensionnelle et à la méthode d'Euler.

1.2 (III.1.b) Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le mobile et les représenter sur le schéma reproduit.

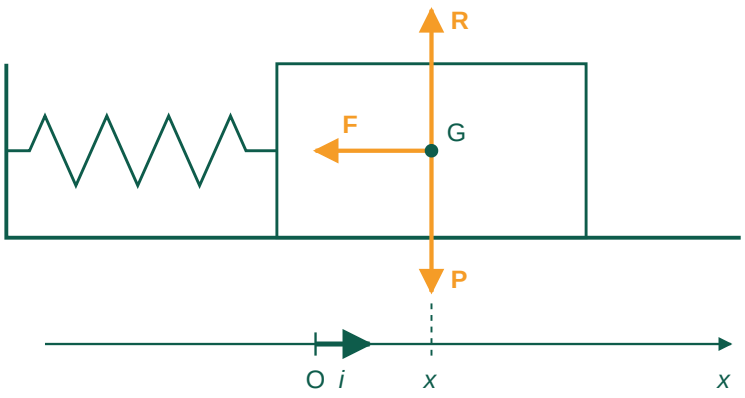
Système {mobile}, référentiel terrestre supposé galiléen. Sans frottement, trois forces s'exercent sur le mobile :

- son poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas ;
- la réaction $\vec{R}$ du coussin d'air, verticale, vers le haut ;
- la force de rappel $\vec{F}$ du ressort, horizontale, dirigée vers O.

Le mouvement est horizontal : $\vec{P}$ et $\vec{R}$ se compensent, leurs flèches ont la même longueur.

Trois forces : $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{F}$ (schéma tracé pour $x > 0$).

PIÈGE
Dessiner $\vec{F}$ vers la droite alors que le mobile est représenté à droite de O, ou ajouter une force de frottement : le coussin d'air la supprime dans cette partie.



1.2 · Schéma 3 reproduit pour $x > 0$: $\vec{F}$ est dirigée vers O, $\vec{P}$ et $\vec{R}$ se compensent.

1.3 (III.1.c) À l'aide de la deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse $x(t)$.

Deuxième loi de Newton appliquée au mobile, de masse m constante :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}$$

Projection sur l'axe $(O, \vec{i})$: $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont verticales, leurs projections sont nulles. Il reste

$$-k\,x = m\,a_x = m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,x = 0}$$

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi sous forme vectorielle, puis projection sur l'axe du mouvement.

1.4 (III.1.d) Calculer la raideur k du ressort à partir de la période mesurée et de l'expression $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Données utiles $m = 80\ \mathrm{g} = 8{,}0 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg}$; $T_0 = 0{,}20\ \mathrm{s}$

On élève au carré : $T_0^2 = 4\pi^2\,\dfrac{m}{k}$, donc $k = \dfrac{4\pi^2\,m}{T_0^2}$.

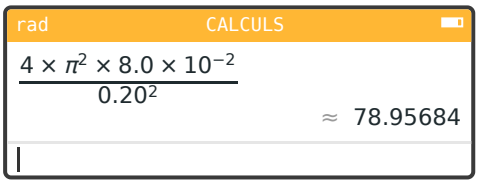
$$k = \frac{4\pi^2 \times 8{,}0 \times 10^{-2}}{0{,}20^2} = 79\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

$$\boxed{k = 79\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}}$$

PIÈGE
Laisser la masse en grammes : on trouverait une raideur mille fois trop grande. Dans cette formule, m est en kilogrammes.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme m et T_0. L'unité $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ est équivalente à $\mathrm{kg \cdot s^{-2}}$, celle que donne directement la formule.

À LA CALCULATRICE



2.1 (III.2.a) Par analyse dimensionnelle, déterminer les unités de α et β dans le système international, l'équation étant $a + \alpha\,v + \beta\,x = 0$.

Les trois termes de la somme ont la même unité que l'accélération a, le $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Pour $\alpha\,v$, avec v en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$: unité de $\alpha = \dfrac{\mathrm{m \cdot s^{-2}}}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}} = \mathrm{s^{-1}}$.

Pour $\beta\,x$, avec x en m : unité de $\beta = \dfrac{\mathrm{m \cdot s^{-2}}}{\mathrm{m}} = \mathrm{s^{-2}}$.

$$\boxed{\alpha \text{ s'exprime en } \mathrm{s^{-1}} \text{ et } \beta \text{ en } \mathrm{s^{-2}} : \alpha = 60\ \mathrm{s^{-1}},\ \beta = 1{,}00 \times 10^3\ \mathrm{s^{-2}}.}$$

MÉTHODE
On ne peut additionner que des grandeurs de même unité : on impose à chaque terme l'unité du terme connu, puis on isole le coefficient cherché.

2.2 (III.2.b) Calculer l'accélération a_7 à l'instant $t_7 = 0{,}07\ \mathrm{s}$ à l'aide de l'équation différentielle.

Données utiles $\alpha = 60\ \mathrm{s^{-1}}$; $\beta = 1{,}00 \times 10^3\ \mathrm{s^{-2}}$; tableau : $v_7 = -0{,}20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $x_7 = 0{,}008\ \mathrm{m}$

L'équation est vraie à chaque instant, donc à t_7 : $a_7 = -\alpha\,v_7 - \beta\,x_7$.

$$a_7 = -60 \times (-0{,}20) - 1{,}00 \times 10^3 \times 0{,}008 = 12 - 8{,}0 = 4{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$\boxed{a_7 = 4{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}}$$

PIÈGE
Perdre le signe de v_7 : la vitesse est négative, donc le terme $-\alpha\,v_7$ est positif. Avec $+0{,}20$ on obtiendrait $-20\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

COMPRENDRE
Le résultat est écrit au dixième, comme les autres accélérations du tableau.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$(-60) \times (-0.20) - 1.00 \times 10^3 \times 0.008$

≈ 4

2.3 (III.2.c) Calculer la vitesse v_8 et l'abscisse x_8 à l'instant $t_8 = 0{,}08$ s par la méthode d'Euler.

Données utiles pas $\Delta t = 0{,}01$ s ; $a_7 = 4{,}0$ m · s^{-2} (III.2.b) ; $v_7 = -0{,}20$ m · s^{-1} ; $x_7 = 0{,}008$ m

Sur un pas Δt très court, $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ et $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \approx \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, d'où

$$v_{n+1} = v_n + a_n \, \Delta t \qquad x_{n+1} = x_n + v_n \, \Delta t$$

$v_8 = v_7 + a_7 \, \Delta t = -0{,}20 + 4{,}0 \times 0{,}01 = -0{,}16$ m · s^{-1}

$x_8 = x_7 + v_7 \, \Delta t = 0{,}008 + (-0{,}20) \times 0{,}01 = 0{,}006$ m

$v_8 = -0{,}16$ m · s^{-1} et $x_8 = 0{,}006$ m

PIÈGE
Utiliser a_6 au lieu de a_7 pour v_8 : chaque ligne se calcule à partir de la ligne juste au-dessus.

COMPRENDRE
Le tableau du sujet a été rempli avec la vitesse nouvelle, $x_{n+1} = x_n + v_{n+1} \, \Delta t$ (ligne 1 : $0{,}030 - 0{,}30 \times 0{,}01 = 0{,}027$). Ici cette variante donne $0{,}0064$, soit le même arrondi $0{,}006$ m.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$-0.20 + 4.0 \times 0.01$

≈ -0.16

$0.008 + (-0.20) \times 0.01$

≈ 0.006

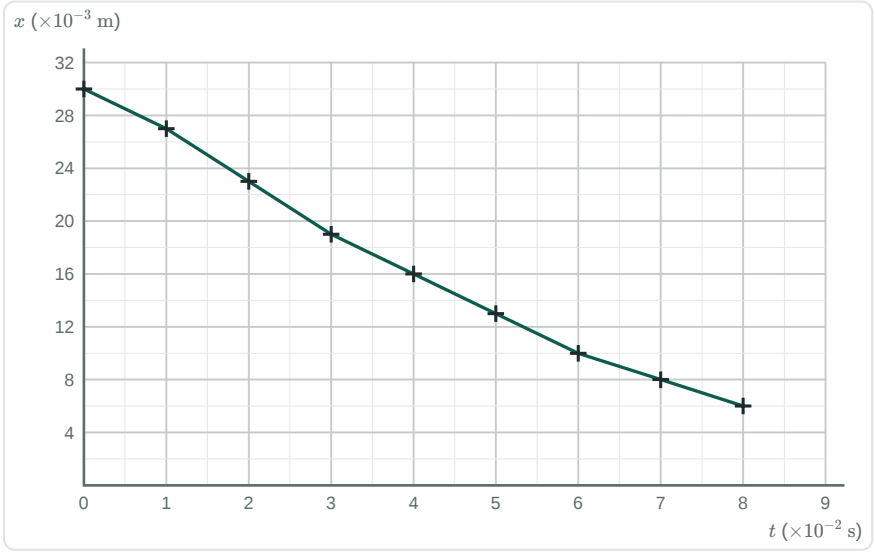
2.4 (III.2.d) Tracer la courbe donnant l'abscisse x en fonction du temps (1 cm pour 0,01 s ; 1 cm pour 0,002 m).

Données utiles valeurs de x du tableau, complétées par $x_8 = 0{,}006$ m (III.2.c)

On place les neuf points $(t_n ; x_n)$ du tableau, de $(0 ; 0{,}030)$ à $(0{,}08 ; 0{,}006)$, puis on trace une courbe lisse qui passe au plus près des points.

La courbe part de $x_0 = 0{,}030$ m et décroît de moins en moins vite jusqu'à $x_8 = 0{,}006$ m, sans s'annuler.

MÉTHODE
Respecter les échelles imposées, nommer les axes avec leurs unités, marquer les points par des croix et ne pas les relier à la règle.



2.4 · Abscisse x du mobile calculée par la méthode d'Euler (graduations en mm et en centièmes de seconde)

2.5 (III.2.e) Nommer les deux régimes possibles d'un oscillateur. La courbe tracée permet-elle de dire dans quel régime se trouve l'oscillateur étudié ?

Un oscillateur amorti peut suivre deux régimes :

- le régime **pseudo-périodique** (amortissement faible) : le mobile oscille de part et d'autre de O, x change de signe, avec une amplitude qui diminue ;
- le régime **apériodique** (amortissement fort) : le mobile revient vers O sans osciller, x ne change pas de signe.

Sur la courbe, x décroît en restant positif jusqu'à $0{,}08$ s. Les deux régimes commencent ainsi : rien n'indique si x va ensuite devenir négatif.

La courbe ne permet pas de conclure : il faudrait poursuivre le calcul sur une durée plus longue.

PIÈGE

Conclure « apériodique » parce qu'aucune oscillation n'est visible. La durée calculée, $0{,}08$ s, est inférieure à la moitié de la période propre $T_0 = 0{,}20$ s de la première partie.