Etude d'un supercondensateur

Bac S 2007 Inde (Pondichéry) (ancien programme) · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Avec la loi d'additivité des tensions, établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pendant la charge.

Interrupteur fermé, la loi d'additivité des tensions s'écrit : $E = u_R + u_C$.

Loi d'Ohm (conducteur ohmique en convention récepteur) : $u_R = R\,i$.

Le courant i arrive sur l'armature qui porte q : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, et $q = C\,u_C$ avec C constante, donc $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

$$R\,C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$$

PIÈGE

Écrire $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ sans regarder le schéma. La relation n'a ce signe que si la flèche de i pointe vers l'armature qui porte q, ce qui est le cas ici.

MÉTHODE

Toujours la même chaîne pour un circuit RC : loi des mailles, loi d'Ohm, $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, $q = C\,u_C$. On aboutit à une équation ne contenant plus que u_C et sa dérivée.

1.2 Vérifier que $u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ est solution de l'équation différentielle et respecte $u_C(0) = 0$. Exprimer τ en fonction des caractéristiques du circuit.

On dérive la fonction proposée : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

On reporte dans le membre de gauche de l'équation :

$$R\,C\,\frac{E}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + E - E\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = E + E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(\frac{R\,C}{\tau} - 1\right)$$

Ce membre est égal à E à chaque instant si et seulement si $\dfrac{R\,C}{\tau} - 1 = 0$.

Condition initiale : $u_C(0) = E\left(1 - \mathrm{e}^{0}\right) = E\,(1-1) = 0$. Elle est bien vérifiée.

La fonction est solution à condition que $\tau = R\,C$.

PIÈGE

Oublier le facteur $\dfrac{1}{\tau}$ et le changement de signe en dérivant : la dérivée de $-\mathrm{e}^{-t/\tau}$ est $+\dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

COMPRENDRE

L'égalité doit être vraie quel que soit t, alors que $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ ne s'annule jamais : c'est donc la parenthèse qui doit être nulle. C'est cet argument qui impose la valeur de τ.

1.3 À partir de l'enregistrement 1, par une méthode à détailler, déterminer la capacité C du condensateur. Comparer à la valeur indiquée par le fabricant.

Données utiles $R = 10\ \Omega$; $E = 5{,}0$ V ; $\tau = R\,C$ (II.1.b) ; indication du fabricant : « 1 F »

À la date $t = \tau$: $u_C(\tau) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = 0{,}63\,E = 0{,}63 \times 5{,}0 = 3{,}2$ V.

Sur l'enregistrement, on trace l'horizontale $u_C = 3{,}2$ V : elle rencontre la courbe au point d'abscisse $\tau \approx 12$ s.

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{12}{10} = 1{,}2\ \mathrm{F}$$

Écart relatif avec l'indication du fabricant : $\dfrac{1{,}2 - 1}{1} = 20\ \%$.

$C \approx 1{,}2$ F : même ordre de grandeur que le « 1 F » annoncé (un seul chiffre significatif), donc résultat compatible avec l'indication du fabricant.

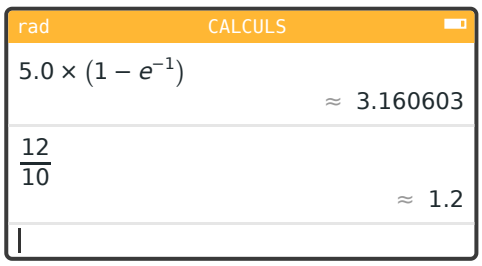
COMPRENDRE

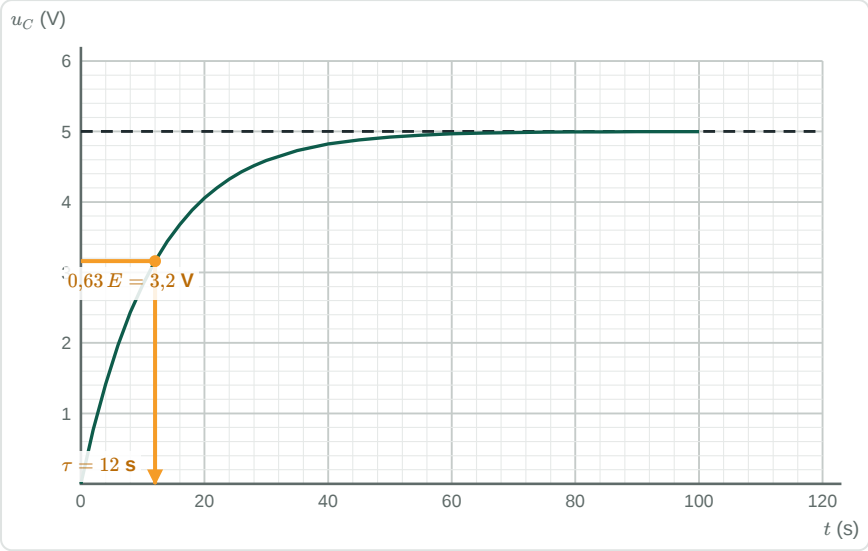
Deux chiffres significatifs, comme R et E. La lecture de τ se fait à 1 s près environ : C est connue à 10 % près, et les capacités sont de toute façon garanties avec une large tolérance.

MÉTHODE

Autre méthode acceptée : tracer la tangente à l'origine ; elle coupe l'asymptote $u_C = E$ à la date $t = \tau$. La lecture à 63 % est plus précise, car une tangente se trace mal.

À LA CALCULATRICE





1.3 · Enregistrement 1 (annexe) : lecture de la constante de temps

2.1 Pendant la décharge dans le moteur, $u_C(t) = a\,t + b$ avec $a < 0$ et $b > 0$. Calculer a et b.

Données utiles $u_C(0) = 4{,}9$ V ; $u_C(18) = 1{,}5$ V

À $t = 0$: $u_C(0) = b$, donc $b = 4{,}9$ V.

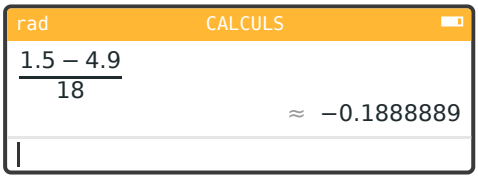
À $t = 18$ s : $u_C(18) = 18\,a + b$, donc

$$a = \frac{u_C(18) - b}{18} = \frac{1{,}5 - 4{,}9}{18} = -0{,}19 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$$

$a = -0{,}19$ V · s^{-1} et $b = 4{,}9$ V

PIÈGE
Donner a et b sans unité. b est une tension (V) et a une tension divisée par une durée (V · s^{-1}).

À LA CALCULATRICE



2.2 Exprimer la charge $q(t)$ du condensateur en fonction du temps. En déduire la valeur de l'intensité i et commenter son signe.

Données utiles $C = 1{,}0$ F ; $a = -0{,}19$ V · s^{-1} et $b = 4{,}9$ V (II.2.a)

$q(t) = C\,u_C(t) = C\,(a\,t + b)$, soit, avec q en coulombs et t en secondes : $q(t) = -0{,}19\,t + 4{,}9$.

Avec l'orientation du schéma 2 (i dirigé vers l'armature qui porte q) :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\,a = 1{,}0 \times (-0{,}19) = -0{,}19 \text{ A}$$

L'intensité est constante et négative : la charge q diminue, le condensateur se décharge. Le courant circule réellement dans le sens opposé au sens positif choisi sur le schéma.

$q(t) = C\,(a\,t + b)$ et $i = C\,a = -0{,}19$ A

PIÈGE
Annoncer $i = 0{,}19$ A sans le signe. L'intensité est algébrique ; le signe « $-$ » porte l'information demandée sur le sens réel du courant.

COMPRENDRE
Une tension qui décroît linéairement signifie une intensité constante : c'est la « décharge à courant constant » du titre. Dans la partie II.1, au contraire, l'intensité diminuait au cours de la charge.

2.3 Calculer l'énergie stockée dans le condensateur à $t = 0$, celle qui reste à $t = 18$ s, l'énergie cédée, l'énergie potentielle reçue par la masse, puis le rendement du dispositif.

Données utiles $C = 1{,}0$ F ; $u_C(0) = 4{,}9$ V ; $u_C(18) = 1{,}5$ V ; $m = 100$ g ; $h = 3{,}10$ m ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Énergie stockée dans un condensateur : $E_C = \dfrac{1}{2} C\, u_C^2$.

- À $t = 0$: $E_C(0) = \dfrac{1}{2} \times 1{,}0 \times 4{,}9^2 = 12$ J.
- À $t = 18$ s : $E_C(18) = \dfrac{1}{2} \times 1{,}0 \times 1{,}5^2 = 1{,}1$ J.
- Énergie cédée : $E_{\text{cédée}} = E_C(0) - E_C(18) = 12{,}005 - 1{,}125 = 10{,}88$ J, soit 11 J.
- Énergie potentielle de pesanteur gagnée par la masse : $E_{pp} = m\,g\,h = 0{,}100 \times 9{,}8 \times 3{,}10 = 3{,}0$ J.
- Rendement : $\eta = \dfrac{E_{pp}}{E_{\text{cédée}}} = \dfrac{3{,}038}{10{,}88} = 0{,}28$.

$E_C(0) = 12$ J ; $E_C(18) = 1{,}1$ J ; $E_{\text{cédée}} = 11$ J ; $E_{pp} = 3{,}0$ J ; $\eta = 28\ \%$

PIÈGE

Calculer l'énergie cédée avec $\frac{1}{2} C\,(4{,}9 - 1{,}5)^2$: il faut la différence des carrés, pas le carré de la différence. Penser aussi à convertir m en kilogrammes.

COMPRENDRE

Le rendement compare l'énergie utile (la masse soulevée) à l'énergie dépensée (cédée par le condensateur). Les 72 % restants sont dissipés : effet Joule dans le moteur et les fils, frottements.

MÉTHODE

Garder les valeurs non arrondies dans la calculatrice pour les calculs enchaînés : avec les valeurs arrondies $3{,}0$ et 11, on trouverait 27 % au lieu de 28 %.

À LA CALCULATRICE

