étude de satellites d'observation

Bac S 2007 Amérique du Sud (ancien programme) · Exercice 4 **5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1.1 Représenter sur la figure 1 la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite S. Donner son expression vectorielle en représentant le vecteur unitaire choisi.

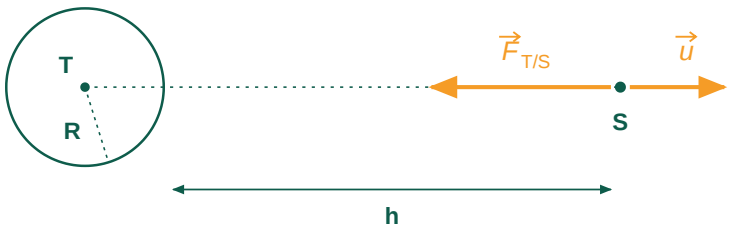
La force est appliquée en S, portée par la droite (TS) et dirigée vers T (voir figure).

On choisit le vecteur unitaire $\vec{u}$ de direction (TS), orienté de T vers S.

La distance entre les centres est $TS = R + h$:

$$\overrightarrow{F}_{T/S} = -G\,\frac{m\,M}{(R+h)^2}\,\vec{u}$$

PIÈGE
Écrire h^2 au dénominateur : la distance d se mesure entre les centres, soit $R + h$. Le signe dépend du sens choisi pour $\vec{u}$: il doit traduire une force attractive.



1.1.1 · Figure 1 de l'annexe complétée : force et vecteur unitaire tracés en orange

1.1.2 Calculer la valeur de cette force.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ USI ; $m = 8200$ kg ; $M = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg ; $R = 6{,}38 \times 10^{3}$ km ; $h = 800$ km

$R + h = 6{,}38 \times 10^6 + 0{,}80 \times 10^6 = 7{,}18 \times 10^6$ m.

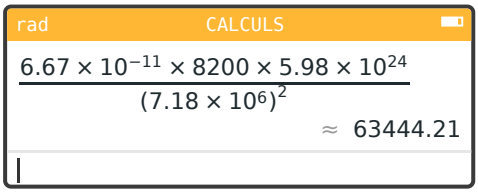
$$F_{T/S} = G\,\frac{m\,M}{(R+h)^2} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 8200 \times 5{,}98 \times 10^{24}}{(7{,}18 \times 10^6)^2}$$

$$F_{T/S} = 6{,}34 \times 10^4 \text{ N}$$

PIÈGE
Laisser R et h en kilomètres : avec G en unités SI, les distances sont en mètres. L'erreur multiplie le résultat par 10^6.

COMPRENDRE
G, M et R sont donnés avec trois chiffres significatifs : les résultats de l'exercice en gardent trois.

À LA CALCULATRICE



1.2 En considérant la seule action de la Terre, établir l'expression vectorielle de l'accélération du satellite dans le référentiel géocentrique, en fonction de M, h et R.

Système {satellite}, de masse m constante ; référentiel géocentrique supposé galiléen ; seule force : $\overrightarrow{F}_{T/S}$.

Deuxième loi de Newton : $\overrightarrow{F}_{T/S} = m\,\vec{a}$, soit $-G\,\frac{m\,M}{(R+h)^2}\,\vec{u} = m\,\vec{a}$.

$$\vec{a} = -\frac{G\,M}{(R+h)^2}\,\vec{u}$$

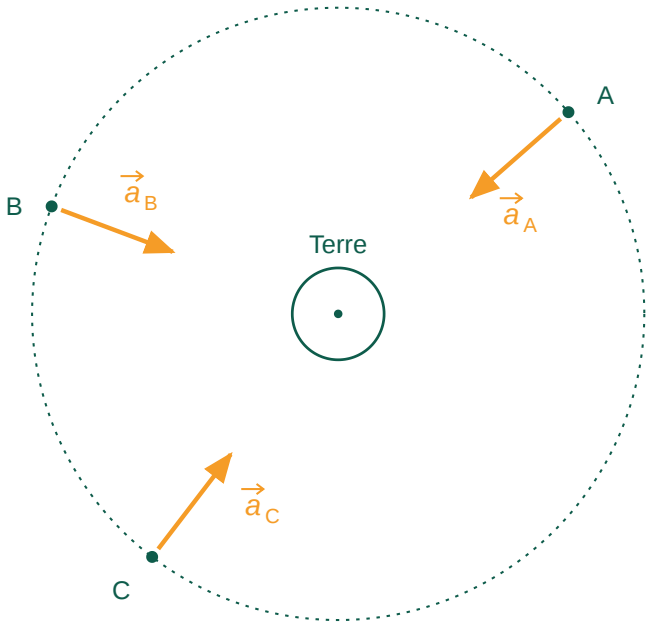
COMPRENDRE
La masse m se simplifie : l'accélération, donc le mouvement, ne dépend pas de la masse du satellite. La constante G figure forcément dans l'expression, même si l'énoncé ne la cite pas.

1.3 Sur la figure 2, représenter, sans souci d'échelle, le vecteur accélération aux positions A, B et C du satellite.

D'après 1.2, $\vec{a}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et de sens opposé : en chaque point il est porté par le rayon et dirigé vers le centre de la Terre. Sa valeur $\dfrac{GM}{(R+h)^2}$ est la même partout sur l'orbite.

Trois vecteurs de même longueur, d'origines A, B et C, pointant vers le centre de la Terre.

PIÈGE
Tracer $\vec{a}$ tangent à la trajectoire, comme une vitesse, ou avec des longueurs différentes : l'altitude est constante, donc la valeur de l'accélération aussi.



1.3 · Figure 2 de l'annexe complétée : accélération dirigée vers le centre de la Terre, même longueur en A, B et C

1.4 Montrer que, pour un mouvement circulaire (admis uniforme), la vitesse du satellite a pour expression $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$.

Pour un mouvement circulaire uniforme de rayon $R+h$, l'accélération est centripète, de valeur $a = \dfrac{v^2}{R+h}$.

En égalant avec la valeur trouvée en 1.2 :

$$\frac{v^2}{R+h} = \frac{GM}{(R+h)^2} \quad \text{donc} \quad v^2 = \frac{GM}{R+h}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

MÉTHODE
Satellite en orbite circulaire : 1) deuxième loi de Newton pour obtenir $\vec{a}$; 2) accélération centripète v^2/r ; 3) égalité des deux valeurs. On en tire v, puis T.

1.5 Calculer la vitesse du satellite en $\mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

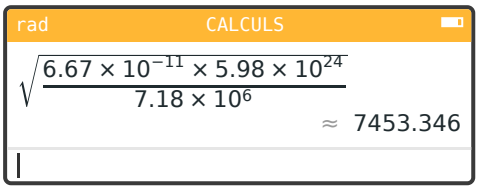
Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ USI ; $M = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg ; $R + h = 7{,}18 \times 10^{6}$ m (1.1.2)

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{7{,}18 \times 10^{6}}} = 7{,}45 \times 10^{3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$v = 7{,}45\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$

PIÈGE
La formule donne des $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$: il reste à diviser par 1000 pour répondre dans l'unité demandée.

À LA CALCULATRICE



1.6 Donner l'expression de la période de révolution du satellite en fonction de sa vitesse et de R et h, puis calculer sa valeur.

Données utiles v (1.5) ; $R + h = 7{,}18 \times 10^{6}$ m

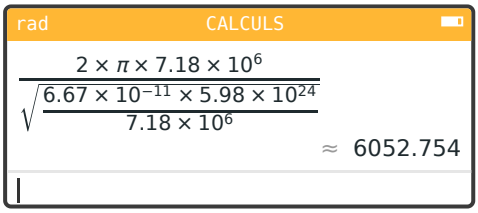
Pendant une période T, le satellite parcourt à vitesse constante la circonférence $2\pi(R+h)$: $v = \dfrac{2\pi(R+h)}{T}$, donc

$$T = \frac{2\pi\,(R+h)}{v} = \frac{2\pi \times 7{,}18 \times 10^{6}}{7{,}453 \times 10^{3}}$$

$T = 6{,}05 \times 10^{3}$ s, soit environ 1 h 41 min.

PIÈGE
Reprendre la valeur arrondie $7{,}45 \times 10^{3}$ donne $6{,}06 \times 10^{3}$ s. On garde la valeur de v en mémoire dans la calculatrice et on n'arrondit qu'à la fin.

À LA CALCULATRICE



2.1 Donner les trois conditions à remplir par METEOSAT 8 pour qu'il soit géostationnaire.

Pour rester immobile par rapport au sol, le satellite doit :

- décrire une orbite circulaire située dans le plan de l'équateur terrestre ;
- tourner dans le même sens que la Terre autour de l'axe des pôles ;
- avoir une période de révolution égale à la période de rotation propre de la Terre (1436 min).

Orbite circulaire équatoriale, même sens de rotation que la Terre, période de 1436 min.

COMPRENDRE
ENVISAT ne peut pas être géostationnaire : son orbite passe par les pôles et sa période (1.6) est bien plus courte que 1436 min.

2.2 À partir des réponses 1.4 et 1.6, établir l'expression de la constante $K = \dfrac{T^2}{r^3}$ en fonction de G et M, puis calculer K en unités SI.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ USI ; $M = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

Avec $r = R + h$: $T = \dfrac{2\pi r}{v}$ (1.6), donc $T^2 = \dfrac{4\pi^2 r^2}{v^2}$. Or $v^2 = \dfrac{G\,M}{r}$ (1.4), d'où

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G\,M} \quad \text{soit} \quad K = \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M}$$

$$K = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}$$

$$K = \frac{4\pi^2}{G\,M} = 9{,}90 \times 10^{-14}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$$

COMPRENDRE
K ne dépend que de la masse M de l'astre attracteur : la même constante vaut pour ENVISAT, METEOSAT 8 et l'orbite de transfert.

À LA CALCULATRICE

rad — CALCULS

$$\frac{4 \times \pi^2}{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}} \approx 9.897664 \times 10^{-14}$$

2.3 En déduire, pour METEOSAT 8, la valeur de $R + H$, puis celle de H.

Données utiles K (2.2) ; période : 1436 min ; $R = 6{,}38 \times 10^3$ km

Satellite géostationnaire : $T = 1436 \times 60 = 86\,160$ s.

Troisième loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{(R+H)^3} = K$, donc $R + H = \sqrt[3]{\dfrac{T^2}{K}}$.

$$R + H = \sqrt[3]{\frac{86\,160^2}{9{,}898 \times 10^{-14}}} = 4{,}22 \times 10^7\ \text{m}$$

$H = 4{,}22 \times 10^7 - 6{,}38 \times 10^6 = 3{,}58 \times 10^7$ m.

$R + H = 4{,}22 \times 10^4$ km et $H = 3{,}58 \times 10^4$ km, valeur voisine des 36 000 km annoncés.

PIÈGE
Laisser la période en minutes, ou annoncer $4{,}22 \times 10^4$ km comme altitude : c'est le rayon de l'orbite, il faut encore retrancher R.

À LA CALCULATRICE

rad — CALCULS

$$1436 \times 60 = 86\,160$$

$$\sqrt[3]{\frac{86\,160^2}{9.898 \times 10^{-14}}} \approx 4.217172 \times 10^7$$

$$4.22 \times 10^7 - 6.38 \times 10^6 \approx 3.582 \times 10^7$$

2.4.1 Calculer la longueur r du demi-grand axe de l'orbite de transfert.

Données utiles altitude du périgée P : 200 km ; altitude de l'apogée A : 36 000 km ; $R = 6{,}38 \times 10^3$ km

Le grand axe PA traverse la Terre de part en part : sa longueur est la somme de l'altitude de P, du diamètre terrestre et de l'altitude de A.

$$2r = 200 + 2 \times 6{,}38 \times 10^3 + 36\,000 = 48\,960\ \text{km}$$

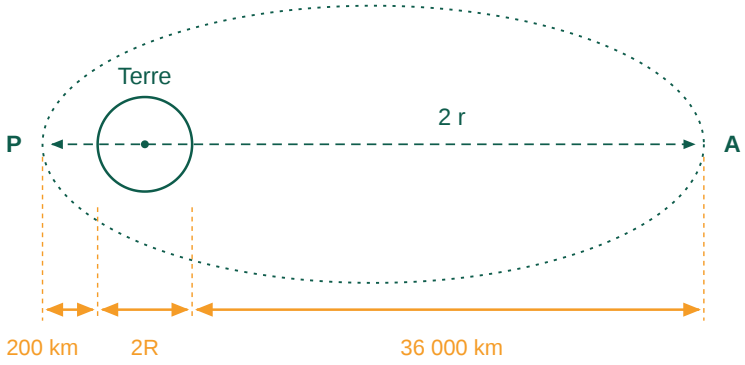
$r = 24\,480\ \text{km} \approx 2{,}45 \times 10^4$ km

PIÈGE
Oublier le diamètre de la Terre, ou n'ajouter qu'un seul rayon : les altitudes sont comptées depuis le sol, de chaque côté de la planète.

À LA CALCULATRICE

rad — CALCULS

$$\frac{200 + 2 \times 6.38 \times 10^3 + 36\,000}{2} \approx 24480$$



2.4.1 · Figure 3 de l'annexe (sans souci d'échelle) : décomposition du grand axe $PA = 2r$

2.4.2 À l'aide de la troisième loi de Kepler, en déduire la période T du satellite sur cette orbite de transfert.

Données utiles K (2.2) ; $r = 2{,}448 \times 10^7$ m (2.4.1)

La constante K est la même pour toute orbite autour de la Terre :
$\frac{T^2}{r^3} = K$, donc $T = \sqrt{K\,r^3}$.

$$T = \sqrt{9{,}898 \times 10^{-14} \times (2{,}448 \times 10^7)^3}$$

$T = 3{,}81 \times 10^4$ s, soit environ 10 h 35 min.

COMPRENDRE

Le demi-grand axe de l'orbite de transfert est plus petit que le rayon de l'orbite géostationnaire : la période est donc plus courte que 1436 min, ce que le calcul confirme.

À LA CALCULATRICE

