Datation des séismes en Californie

Bac S 2005 Nouvelle-Calédonie (ancien programme) · Exercice 3 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 Donner la composition en protons et en neutrons des noyaux ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ et ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$.

Un noyau ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ contient Z protons et $A - Z$ neutrons.

${}^{12}_{6}\mathrm{C}$: 6 protons et $12 - 6 = 6$ neutrons.

${}^{14}_{6}\mathrm{C}$: 6 protons et $14 - 6 = 8$ neutrons.

PIÈGE
Le nombre du haut, A, compte tous les nucléons : annoncer « 14 neutrons » pour le carbone 14 est l'erreur classique.

1.2 Justifier que ces deux noyaux sont isotopes en définissant ce mot.

Des noyaux isotopes ont le même numéro atomique Z (même nombre de protons, donc même élément chimique) mais des nombres de neutrons différents, donc des nombres de masse A différents.

${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ et ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ ont tous deux 6 protons, mais 6 et 8 neutrons : ils sont isotopes.

1.3 Le carbone 14 est émetteur β^-. Écrire l'équation de la réaction nucléaire en la justifiant.

Données utiles $Z(\mathrm{B}) = 5$; $Z(\mathrm{C}) = 6$; $Z(\mathrm{N}) = 7$

Une désintégration β^- émet un électron ${}^{0}_{-1}\mathrm{e}$: ${}^{14}_{6}\mathrm{C} \longrightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$.

Conservation du nombre de nucléons : $14 = A + 0$, donc $A = 14$.

Conservation de la charge électrique : $6 = Z - 1$, donc $Z = 7$: le noyau fils est un noyau d'azote.

${}^{14}_{6}\mathrm{C} \longrightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$

PIÈGE
Écrire $6 = Z + 1$ et trouver le bore. La charge de l'électron est négative : Z augmente.

COMPRENDRE
Le noyau fils n'étant pas excité, aucun photon γ n'accompagne la désintégration. L'électron émis sort du noyau : un neutron s'y est transformé en proton, d'où Z qui augmente d'une unité.

1.4 Calculer, en joules, l'énergie de liaison $E_l({}^{14}\mathrm{C})$ du carbone 14.

Données utiles $m_p = 1{,}672\,621 \times 10^{-27}$ kg ; $m_n = 1{,}674\,927 \times 10^{-27}$ kg ; $m({}^{14}\mathrm{C}) = 2{,}325\,84 \times 10^{-26}$ kg ; $c = 2{,}998 \times 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

L'énergie de liaison est l'énergie à fournir au noyau au repos pour le séparer en ses nucléons isolés et au repos : $E_l = \Delta m \cdot c^2$, où Δm est le défaut de masse.

$$\Delta m = 6\,m_p + 8\,m_n - m({}^{14}\mathrm{C})$$

$\Delta m = 6 \times 1{,}672\,621 \times 10^{-27} + 8 \times 1{,}674\,927 \times 10^{-27} - 2{,}325\,84 \times 10^{-26} = 1{,}767 \times 10^{-28}$ kg

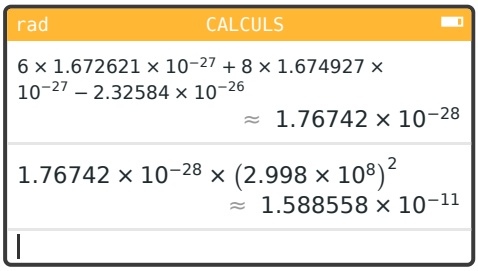
$E_l({}^{14}\mathrm{C}) = 1{,}767 \times 10^{-28} \times (2{,}998 \times 10^{8})^2$

$E_l({}^{14}\mathrm{C}) = 1{,}589 \times 10^{-11}$ J

PIÈGE
Arrondir les masses avant la soustraction : Δm ne représente que 0,8 % de la masse du noyau, tous les chiffres donnés sont nécessaires.

COMPRENDRE
Chiffres significatifs : la masse du noyau est connue à 10^{-31} kg près, donc Δm aussi, soit quatre chiffres. Avec c à quatre chiffres, le résultat en garde quatre.

À LA CALCULATRICE



1.5 En déduire l'énergie de liaison par nucléon du carbone 14, en joules par nucléon.

Données utiles $E_l(^{14}\text{C}) = 1{,}589 \times 10^{-11}$ J (1.4) ; $A = 14$

Le noyau contient $A = 14$ nucléons :

$$\frac{E_l}{A} = \frac{1{,}589 \times 10^{-11}}{14}$$

$$\boxed{\frac{E_l}{A} = 1{,}135 \times 10^{-12} \text{ J par nucléon}}$$

COMPRENDRE
C'est l'énergie de liaison par nucléon, et non l'énergie de liaison, qui permet de comparer la stabilité de deux noyaux. Le nombre 14 est exact : il ne limite pas les chiffres significatifs.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{1.589 \times 10^{-11}}{14} \approx 1.135 \times 10^{-12}$

1.6 Calculer, en joules, l'énergie libérée par la réaction de la question 1.3.

Données utiles $m_e = 9{,}109\,381 \times 10^{-31}$ kg ; $m(^{14}\text{C}) = 2{,}325\,84 \times 10^{-26}$ kg ; $m(^{14}\text{N}) = 2{,}325\,27 \times 10^{-26}$ kg ; $c = 2{,}998 \times 10^{8}$ m · s^{-1}

La masse diminue au cours de la désintégration ; l'énergie libérée correspond à cette perte de masse :

$$E_{\text{libérée}} = \left[m(^{14}\text{C}) - m(^{14}\text{N}) - m_e \right] c^2$$

$m(^{14}\text{C}) - m(^{14}\text{N}) - m_e = 2{,}325\,84 \times 10^{-26} - 2{,}325\,27 \times 10^{-26} - 9{,}109\,381 \times 10^{-31} = 4{,}789 \times 10^{-30}$ kg

$E_{\text{libérée}} = 4{,}789 \times 10^{-30} \times (2{,}998 \times 10^{8})^2$

$$\boxed{E_{\text{libérée}} = 4{,}3 \times 10^{-13} \text{ J}}$$

PIÈGE
Oublier la masse de l'électron émis (16 % de la perte de masse), ou passer par les énergies de liaison alors que les masses des deux noyaux sont données.

COMPRENDRE
La différence des deux masses de noyaux vaut $5{,}7 \times 10^{-30}$ kg, connue à 10^{-31} kg près : deux chiffres significatifs seulement au résultat, malgré la précision des données.

MÉTHODE
Énergie libérée : (masse des réactifs − masse des produits) × c^2, résultat positif. Avec l'ordre inverse, la variation est négative : le système cède cette énergie à l'extérieur.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$2.32584 \times 10^{-26} - 2.32527 \times 10^{-26} - 9.109381 \times 10^{-31} \approx 4.789062 \times 10^{-30}$

$4.7890619 \times 10^{-30} \times (2.998 \times 10^{8})^2 \approx 4.304411 \times 10^{-13}$

2.1 Écrire la loi de décroissance radioactive.

$$\boxed{N(t) = N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

COMPRENDRE
λ et t doivent être dans des unités cohérentes : ici λ en an^{-1} et t en années, l'exposant λt est sans unité.

2.2.1 Donner la définition du temps de demi-vie $t_{1/2}$ d'un échantillon radioactif.

Le temps de demi-vie est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents dans l'échantillon s'est désintégrée.

$$\boxed{N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}}$$

PIÈGE
Au bout de $2\,t_{1/2}$ il reste un quart des noyaux, et non zéro : la population est divisée par deux à chaque demi-vie.

2.2.2 Retrouver l'expression $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

Par définition, $N(t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$. Avec la loi de décroissance :

$$N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{N_0}{2} \quad \text{soit} \quad \mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

On prend le logarithme népérien : $-\lambda\, t_{1/2} = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

MÉTHODE
Pour extraire une durée d'une exponentielle : isoler l'exponentielle, prendre le logarithme népérien des deux membres, puis utiliser $\ln(1/a) = -\ln a$.

2.2.3 En déduire la valeur de la constante radioactive λ en an^{-1}.

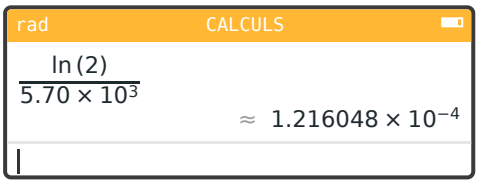
Données utiles $t_{1/2} = 5{,}70 \times 10^3$ ans

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5{,}70 \times 10^3}$$

$$\boxed{\lambda = 1{,}22 \times 10^{-4}\ \mathrm{an}^{-1}}$$

COMPRENDRE
Inutile de convertir en secondes : l'énoncé demande λ en an^{-1} et les durées de la partie 3 sont en années. Trois chiffres significatifs, comme $t_{1/2}$.

À LA CALCULATRICE



2.3.1 Définir l'activité d'un échantillon radioactif et donner son unité dans le système international.

L'activité d'un échantillon est le nombre de désintégrations qui s'y produisent par seconde.

Unité SI : le becquerel (Bq) ; 1 Bq = 1 désintégration par seconde.

COMPRENDRE
L'activité est ce que l'on mesure réellement avec un compteur ; le nombre N de noyaux restants, lui, n'est pas accessible directement.

2.3.2 À partir de $A(t) = \lambda\, N(t)$ et de la loi de décroissance, montrer que $\dfrac{A(t)}{A_0} = \dfrac{N(t)}{N_0} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

À la date t : $A(t) = \lambda\, N(t)$; à la date $t_0 = 0$: $A_0 = \lambda\, N_0$.

Le rapport donne : $\dfrac{A(t)}{A_0} = \dfrac{\lambda\, N(t)}{\lambda\, N_0} = \dfrac{N(t)}{N_0}$.

Or la loi de décroissance $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ s'écrit $\dfrac{N(t)}{N_0} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

$$\boxed{\frac{A(t)}{A_0} = \frac{N(t)}{N_0} = \mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

COMPRENDRE
L'activité suit la même loi exponentielle que le nombre de noyaux, avec la même demi-vie : c'est ce qui permet de dater à partir de simples mesures d'activité.

3.1 Déterminer la durée t_3 écoulée entre le séisme et la mesure pour l'échantillon n°3.

Données utiles $A_0 = 0{,}255$ SI ; $A(t_3) = 0{,}223$ SI ; $t_{1/2} = 5{,}70 \times 10^3$ ans ; $\lambda = \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$ (2.2.3)

D'après 2.3.2 : $\dfrac{A(t_3)}{A_0} = \mathrm{e}^{-\lambda t_3}$, donc $\ln \dfrac{A(t_3)}{A_0} = -\lambda t_3$.

$$t_3 = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{A_0}{A(t_3)} = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{A_0}{A(t_3)}$$

$$t_3 = \frac{5{,}70 \times 10^3}{\ln 2} \times \ln \frac{0{,}255}{0{,}223} = 1\,103 \text{ ans}$$

$t_3 = 1{,}10 \times 10^3$ ans

PIÈGE
Inverser le rapport dans le logarithme donne une durée négative. Comme $A_0 > A(t_3)$, c'est $\ln \dfrac{A_0}{A(t_3)}$ qui est positif.

MÉTHODE
Garder λ sous la forme $\dfrac{\ln 2}{t_{1/2}}$ dans le calcul : avec la valeur arrondie $1{,}22 \times 10^{-4}$ an^{-1} on trouve 1 099 ans, soit le même résultat à trois chiffres significatifs.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{5.70 \times 10^3}{\ln(2)} \times \ln\left(\dfrac{0.255}{0.223}\right)$

$\approx$ 1102.685

3.2 En déduire l'année au cours de laquelle a eu lieu le séisme correspondant à l'échantillon n°3, étudié en 1989.

Données utiles $t_3 = 1{,}10 \times 10^3$ ans (3.1) ; mesure en 1989

Le séisme s'est produit t_3 années avant la mesure :

$$1989 - 1{,}10 \times 10^3 = 889$$

Le séisme a eu lieu vers l'an 890.

COMPRENDRE
t_3 n'est connu qu'à une dizaine d'années près (trois chiffres significatifs) : la méthode donne une époque, pas une année exacte. D'où « vers 890 ».

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$1989 - 1.10 \times 10^3$

$\approx$ 889

3.3 Attribuer aux échantillons 1 et 2 les années 586 et 1247, en justifiant sans calcul.

Données utiles $A_1 = 0{,}233$ SI ; $A_2 = 0{,}215$ SI ; $A_3 = 0{,}223$ SI, séisme vers 890 (3.2)

L'activité décroît au cours du temps : plus un échantillon est enseveli depuis longtemps, plus son activité est faible.

$A_2 < A_3 < A_1$: l'échantillon 2 est le plus ancien, l'échantillon 1 le plus récent.

Échantillon 2 : an 586 ; échantillon 1 : an 1247.

COMPRENDRE
Vérification de cohérence : l'échantillon 3, d'activité intermédiaire, est daté vers 890, bien entre 586 et 1247.