Corrigé complet — Bac S 2005 Polynésie rattrapage (ancien programme)

Physique-chimie, Bac S (épreuve écrite) **16 points** **3 h 30**

Ex 1	**Fermentation dans le vin** Oxydoréduction · Catalyse · Loi de Beer-Lambert et dosage par étalonnage · Dilution · Tableau d'avancement · Vitesse volumique et temps de demi-réaction	6,5 pts	1 h 18	13 questions	p. 2
Ex 2	**Le polonium** Noyau radioactif · Désintégration alpha · Lois de conservation · Loi de décroissance radioactive · Constante radioactive · Demi-vie	4 pts	52 min	7 questions	p. 8
Ex 3	**Etude d'un oscillateur** Deuxième loi de Newton · Oscillateur masse-ressort · Période propre · Énergie potentielle élastique · Conservation de l'énergie mécanique · Résonance et infrarouge	5,5 pts	1 h 05	13 questions	p. 12

Comment s'en servir. Fais d'abord le sujet en temps limité, puis corrige-toi exercice par exercice. À gauche de chaque question, sur les carreaux : ce qu'il faut écrire sur ta copie. À droite : les pièges, ce qu'il faut comprendre et les méthodes.

Fermentation dans le vin

Bac S 2005 Polynésie rattrapage (ancien programme) · Exercice 1 **6,5 points** **Durée conseillée 1 h 18**

1 Partie A, I. Montrer que la réaction (1) est une réaction d'oxydoréduction en faisant apparaître le transfert d'électrons entre les deux couples.

Données utiles couples CH_3CHO / CH_3CH_2OH et NAD^+ / $NADH$

Demi-équation du couple CH_3CHO / CH_3CH_2OH (oxydation de l'éthanol) :

$$CH_3CH_2OH = CH_3CHO + 2\,H^+ + 2\,e^-$$

Demi-équation du couple NAD^+ / $NADH$ (réduction de NAD^+) :

$$NAD^+ + H^+ + 2\,e^- = NADH$$

En les ajoutant, les électrons s'éliminent et il reste un ion H^+ à droite : on retrouve l'équation (1).

L'éthanol (réducteur) cède deux électrons, captés par NAD^+ (oxydant) : la réaction (1) est bien une oxydoréduction.

PIÈGE
Se contenter de dire « il y a un oxydant et un réducteur » : la question exige les deux demi-équations, avec les électrons visibles.

MÉTHODE
Pour équilibrer une demi-équation : les atomes autres que O et H, puis O avec H_2O, puis H avec H^+, enfin les charges avec des électrons. On vérifie que les deux demi-équations échangent le même nombre d'électrons avant de les ajouter.

2 Partie A, I. Quel est le rôle du catalyseur ?

Un catalyseur est une espèce qui augmente la vitesse de la réaction sans figurer dans son équation : il est régénéré en fin de transformation et ne modifie pas l'état final.

Ici le catalyseur est une enzyme : il s'agit d'une catalyse enzymatique.

COMPRENDRE
L'enzyme est spécifique : elle n'accélère que l'oxydation de l'éthanol, ce qui rend le dosage sélectif même si d'autres espèces sont présentes.

1 Partie A, II. Lors du réglage initial, quelle valeur doit-on donner à l'absorbance de la solution de référence ?

On règle l'absorbance de la solution de référence à $A = 0$: c'est « faire le blanc ».

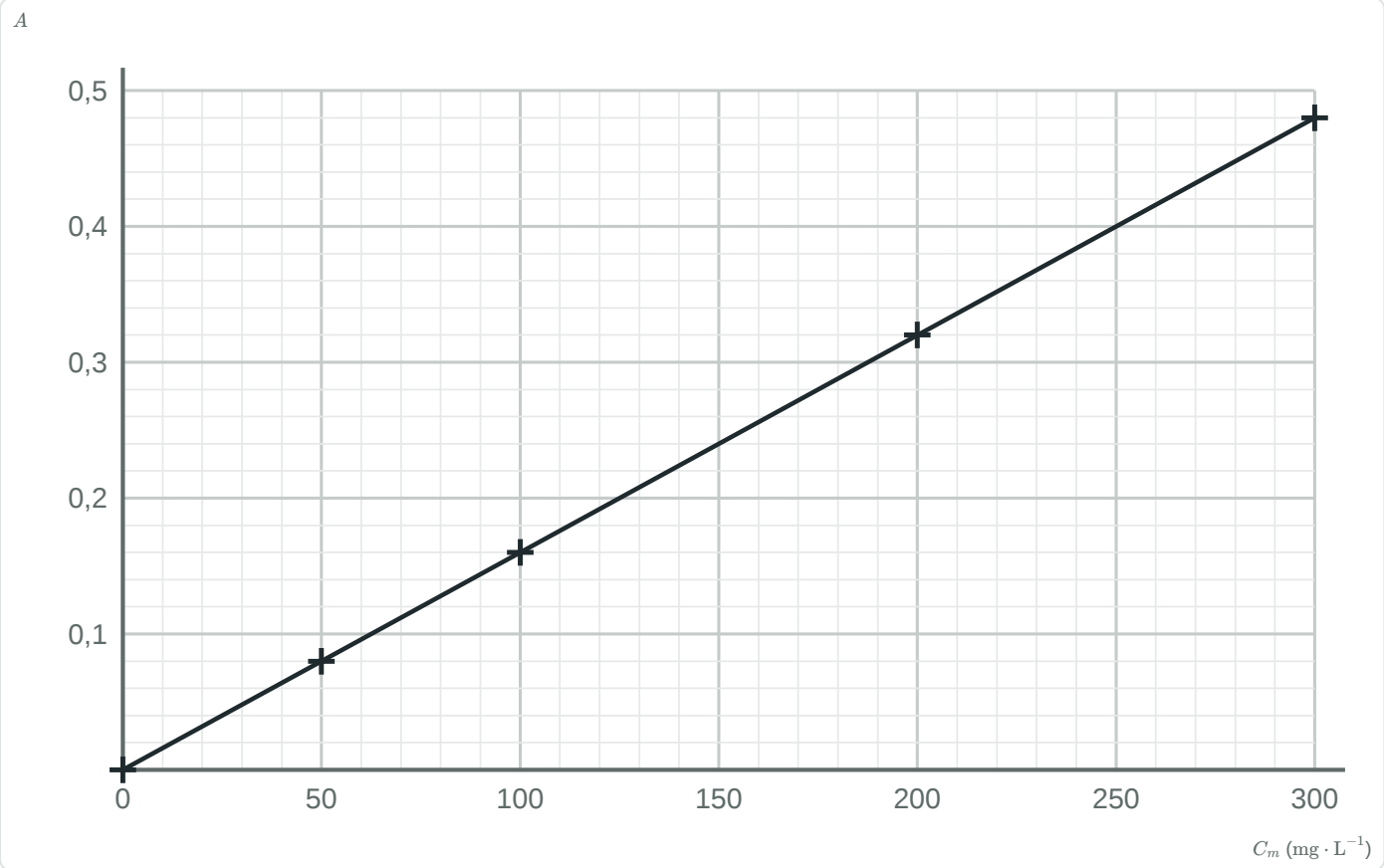
COMPRENDRE
Le blanc contient tout sauf l'espèce étudiée (cuve, solvant, autres réactifs). L'absorbance lue ensuite est due uniquement à $NADH$.

2 Partie A, II. Tracer la courbe représentant l'absorbance A en fonction de la concentration massique C_m.

Données utiles $(C_m$ en $mg \cdot L^{-1}\,;\ A) : (50\,;\ 0{,}08),\ (100\,;\ 0{,}16),\ (200\,;\ 0{,}32),\ (300\,;\ 0{,}48)$

On place les quatre points expérimentaux, C_m en abscisse et A en ordonnée, ainsi que l'origine (réglage du blanc).

Les points sont alignés : on trace à la règle la droite qui passe par l'origine et par les quatre points.



2 · Absorbance en fonction de la concentration massique en éthanol

3 Partie A, II. Montrer que la représentation graphique est en accord avec la loi de Beer-Lambert $A = k\,C_m$. Déterminer la valeur de k en $\mathrm{L \cdot mg^{-1}}$.

Données utiles droite de la question 2, points $(0\ ;\ 0)$ et $(300\ ;\ 0{,}48)$

La courbe obtenue est une droite passant par l'origine : A est proportionnelle à C_m, ce qui s'écrit $A = k\,C_m$. Le graphique est en accord avec la loi de Beer-Lambert.

k est le coefficient directeur de la droite :

$$k = \frac{0{,}48 - 0}{300 - 0} = 1{,}6 \times 10^{-3}\ \mathrm{L \cdot mg^{-1}}$$

$k = 1{,}6 \times 10^{-3}\ \mathrm{L \cdot mg^{-1}}$

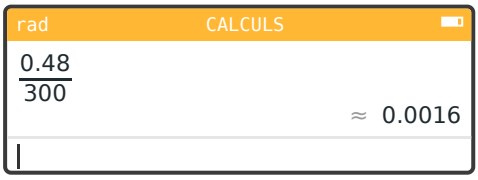
PIÈGE

Calculer k avec un seul point de mesure sans avoir justifié la proportionnalité. Les deux arguments attendus : droite, et passant par l'origine.

COMPRENDRE

Deux chiffres significatifs, comme l'absorbance $0{,}48$. L'unité de k est l'inverse de celle de C_m, puisque A n'a pas d'unité.

À LA CALCULATRICE



1 Partie A, III. Montrer que l'échantillon préparé correspond à une dilution au 1/50e de la solution D.

Données utiles prélèvement $V_D = 1\ \text{mL}$ de solution D ; fiole jaugée $V_e = 50\ \text{mL}$

Lors d'une dilution, la masse d'éthanol prélevée se conserve : $C_{m,D}\,V_D = C_{m,e}\,V_e$.

$$\frac{C_{m,e}}{C_{m,D}} = \frac{V_D}{V_e} = \frac{1}{50}$$

$C_{m,e} = \dfrac{C_{m,D}}{50}$: l'échantillon est la solution D diluée au 1/50e.

COMPRENDRE
Le catalyseur et NAD^+ ajoutés dans la fiole ne changent rien : seul compte le volume final, 50 mL, dans lequel se retrouve l'éthanol de 1 mL de D.

2 Partie A, III. Par une méthode à préciser, déterminer à partir de l'absorbance A_e la concentration massique en éthanol de l'échantillon.

Données utiles $A_e = 0{,}30$; $k = 1{,}6 \times 10^{-3}\ \text{L} \cdot \text{mg}^{-1}$ (II, question 3)

Méthode choisie : le calcul, avec la loi de Beer-Lambert établie à l'étalonnage. L'absorbance A_e est comprise dans la gamme étalon, donc $A_e = k\,C_{m,e}$.

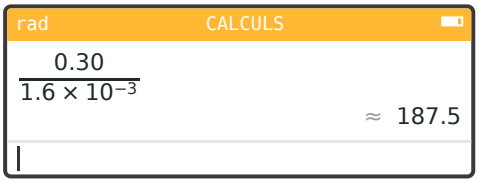
$$C_{m,e} = \frac{A_e}{k} = \frac{0{,}30}{1{,}6 \times 10^{-3}} = 1{,}9 \times 10^2\ \text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$$

$C_{m,e} = 1{,}9 \times 10^2\ \text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$

PIÈGE
Arrondir trop tôt. On garde $187{,}5$ dans la calculatrice pour les questions suivantes et on n'arrondit que les résultats écrits.

MÉTHODE
Autre méthode acceptée : la lecture graphique. On trace l'horizontale $A = 0{,}30$ jusqu'à la droite d'étalonnage, puis la verticale jusqu'à l'axe des abscisses : on lit environ $190\ \text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

À LA CALCULATRICE



3 Partie A, III. En déduire la concentration massique en éthanol : a) de la solution D ; b) du vin.

Données utiles $C_{m,e} = 187{,}5\ \text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$ (question 2, valeur non arrondie) ; $20\ \text{mL}$ de vin distillés, distillat ajusté à $200\ \text{mL}$

a) La solution D a été diluée 50 fois pour préparer l'échantillon :

$$C_{m,D} = 50 \times C_{m,e} = 50 \times 187{,}5 = 9{,}4 \times 10^3\ \text{mg} \cdot \text{L}^{-1} = 9{,}4\ \text{g} \cdot \text{L}^{-1}$$

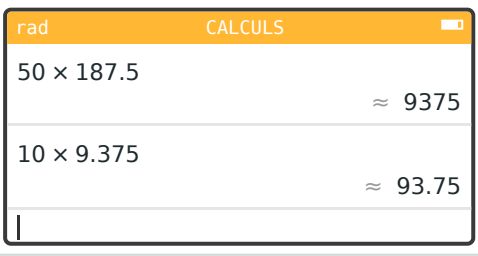
b) Tout l'éthanol des $20\ \text{mL}$ de vin se retrouve dans les $200\ \text{mL}$ de solution D : le vin a été dilué $\dfrac{200}{20} = 10$ fois.

$$C_{m,\text{vin}} = 10 \times C_{m,D} = 10 \times 9{,}375 = 94\ \text{g} \cdot \text{L}^{-1}$$

$C_{m,D} = 9{,}4\ \text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ et $C_{m,\text{vin}} = 94\ \text{g} \cdot \text{L}^{-1}$

COMPRENDRE
Au total le vin a été dilué $50 \times 10 = 500$ fois. Sans ces dilutions, l'absorbance sortirait largement de la gamme étalon et la loi de Beer-Lambert ne serait plus utilisable.

À LA CALCULATRICE



4 Partie A, III. Déterminer le degré alcoolique du vin.

Données utiles $C_{m,\text{vin}} = 93{,}75\ \text{g}\cdot\text{L}^{-1}$ (question 3) ; masse volumique de l'éthanol $\rho = 0{,}80\ \text{kg}\cdot\text{L}^{-1} = 0{,}80\ \text{g}\cdot\text{mL}^{-1}$

Masse d'éthanol dans $V = 100\ \text{mL} = 0{,}100\ \text{L}$ de vin :

$$m = C_{m,\text{vin}} \times V = 93{,}75 \times 0{,}100 = 9{,}4\ \text{g}$$

Volume d'éthanol correspondant :

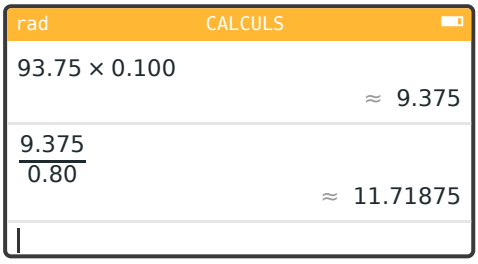
$$V_{\text{éthanol}} = \frac{m}{\rho} = \frac{9{,}375}{0{,}80} = 12\ \text{mL}$$

$100\ \text{mL}$ de vin contiennent $12\ \text{mL}$ d'éthanol.

Le degré alcoolique du vin est de 12 % vol.

PIÈGE
Unités de la masse volumique : $0{,}80\ \text{kg}\cdot\text{L}^{-1}$ vaut $0{,}80\ \text{g}\cdot\text{mL}^{-1}$. Diviser des grammes par $0{,}80$ donne directement des millilitres ; garder les kilogrammes fausse le résultat d'un facteur 1000.

À LA CALCULATRICE



1 Partie B. Montrer que $[\text{acide malique}](t) = \dfrac{C_m(t)}{134}$. En déduire la quantité de matière initiale d'acide malique dans un litre de vin.

Données utiles acide malique $\text{HOOC}-\text{CH}_2-\text{CHOH}-\text{COOH}$; $M_\text{C} = 12\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; $M_\text{O} = 16\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; $M_\text{H} = 1{,}0\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; $C_m(0) = 3{,}5\ \text{g}\cdot\text{L}^{-1}$

Pour un volume V de vin contenant une masse m d'acide malique : $n = \dfrac{m}{M}$, donc

$$[\text{acide malique}](t) = \frac{n}{V} = \frac{m}{M\,V} = \frac{C_m(t)}{M}$$

L'acide malique a pour formule brute $\text{C}_4\text{H}_6\text{O}_5$:

$$M = 4\times 12 + 6\times 1{,}0 + 5\times 16 = 134\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

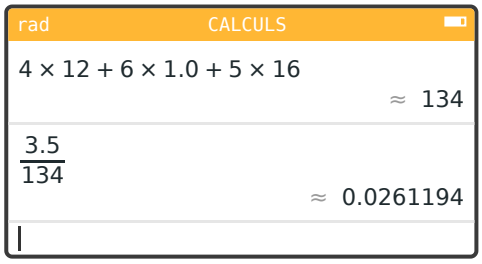
D'où $[\text{acide malique}](t) = \dfrac{C_m(t)}{134}$, avec C_m en $\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$ et la concentration en $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

À $t = 0$: $[\text{acide malique}](0) = \dfrac{3{,}5}{134} = 2{,}6\times 10^{-2}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$, soit pour $V = 1\ \text{L}$ de vin :

$n_{\text{acide malique}}(t=0) = 2{,}6\times 10^{-2}\ \text{mol}$

PIÈGE
Oublier des atomes en comptant sur la formule semi-développée : chaque groupe COOH apporte deux O et un H, le groupe CHOH deux H et un O.

À LA CALCULATRICE



2 Partie B. À l'aide d'un tableau d'évolution, montrer que l'avancement à l'instant t, pour un litre de vin, s'écrit $x(t) = 2{,}6 \times 10^{-2} - n_{\text{acide malique}}(t)$.

Données utiles $n_{\text{acide malique}}(t=0) = 2{,}6 \times 10^{-2}$ mol (question 1)

Tableau d'évolution pour un litre de vin (quantités en mol) :

État	acide malique	acide lactique	CO_2
$t = 0$	$2{,}6 \times 10^{-2}$	0	0
date t	$2{,}6 \times 10^{-2} - x(t)$	$x(t)$	$x(t)$

À la date t : $n_{\text{acide malique}}(t) = 2{,}6 \times 10^{-2} - x(t)$, donc

$x(t) = 2{,}6 \times 10^{-2} - n_{\text{acide malique}}(t)$, avec x et n en mol.

COMPRENDRE
La transformation est totale : à la fin il ne reste plus d'acide malique, donc $x_f = x_{max} = 2{,}6 \times 10^{-2}$ mol. C'est la valeur atteinte par la courbe à 28 jours.

3 Partie B. a) Comment évaluer, à partir du graphe $x = f(t)$, la vitesse volumique de réaction à l'instant t ? b) Commenter l'évolution de cette vitesse au cours du temps.

a) La vitesse volumique de réaction est $v(t) = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, où V est le volume du mélange réactionnel.

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $x = f(t)$ à la date t. On trace donc cette tangente, on calcule son coefficient directeur et on le divise par V.

b) La tangente à la courbe est de moins en moins inclinée quand t augmente : son coefficient directeur diminue.

La vitesse volumique, maximale à $t = 0$, diminue au cours du temps et tend vers zéro en fin de transformation.

Explication : la concentration du réactif (l'acide malique) diminue, et c'est un facteur cinétique.

PIÈGE
Confondre la vitesse avec la valeur de x : l'avancement augmente pendant que la vitesse diminue. C'est la pente de la courbe qu'il faut commenter, pas sa hauteur.

COMPRENDRE
Dans le programme actuel, on définit plutôt la vitesse volumique de disparition d'un réactif, $-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{R}]}{\mathrm{d}t}$. Ici les deux coïncident, car une mole d'acide malique disparaît par mole d'avancement.

4 Partie B. Définir et déterminer le temps de demi-réaction.

Données utiles courbe $x = f(t)$ de l'annexe ; $x_f = 2{,}6 \times 10^{-2}$ mol (question 2)

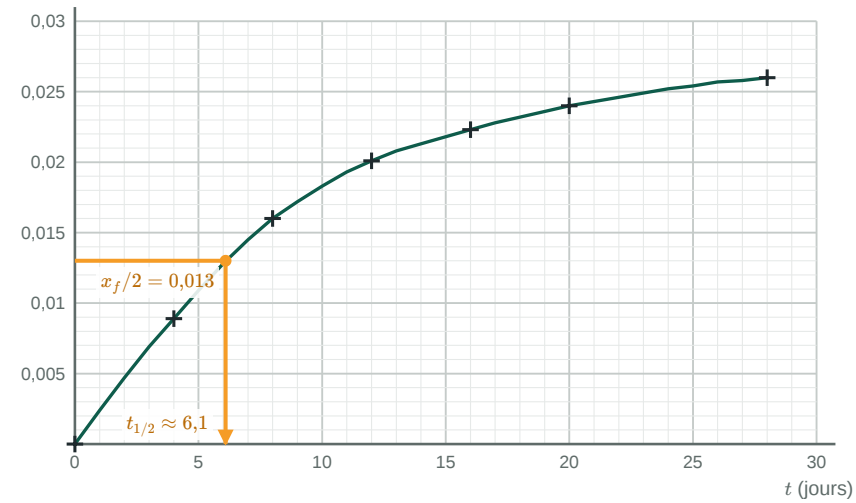
Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle l'avancement atteint la moitié de sa valeur finale : $x(t_{1/2}) = \dfrac{x_f}{2}$.

La courbe atteint $x_f = 0{,}026$ mol à 28 jours (il ne reste plus d'acide malique), donc

$$x(t_{1/2}) = \frac{0{,}026}{2} = 0{,}013 \text{ mol}$$

Sur l'annexe, on trace l'horizontale $x = 0{,}013$ mol jusqu'à la courbe, puis la verticale jusqu'à l'axe des temps.

$t_{1/2} \approx 6$ jours

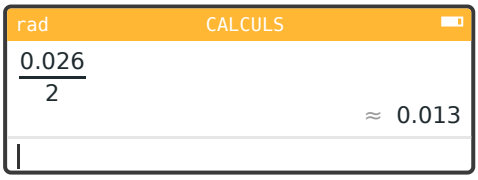


4 · Annexe : avancement en fonction du temps, lecture de $t_{1/2}$

PIÈGE
Prendre la moitié de la durée totale (14 jours). Le temps de demi-réaction se lit à la moitié de l'avancement final, pas à la moitié du temps.

COMPRENDRE
La lecture donne 6,1 jours ; à la précision du graphe, toute valeur voisine de 6 jours convient. Au bout de $t_{1/2}$, la moitié de l'acide malique initial a disparu.

À LA CALCULATRICE



Le polonium

Bac S 2005 Polynésie rattrapage (ancien programme) · Exercice 2 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1 Première partie. Qu'est-ce qu'un noyau radioactif ?

Un noyau radioactif est un noyau instable : il se désintègre spontanément, à un instant imprévisible, pour donner un autre noyau.

Noyau instable qui se transforme spontanément en un noyau différent, en émettant une particule (α, électron ou positon) et souvent un rayonnement γ.

PIÈGE
Oublier le mot « spontanément » : une transformation nucléaire provoquée par un choc (fission, par exemple) n'est pas une désintégration radioactive.

2 Première partie. Quelle est la composition du noyau de polonium 210 ?

Données utiles numéro atomique du polonium : $Z = 84$; nombre de nucléons : $A = 210$

Le noyau se note $^{210}_{84}\text{Po}$.

Nombre de protons : $Z = 84$.

Nombre de neutrons : $N = A - Z = 210 - 84 = 126$.

Le noyau de polonium 210 contient 84 protons et 126 neutrons.

PIÈGE
Donner 210 comme nombre de neutrons, ou ajouter 84 électrons : la question porte sur le noyau, qui ne contient que des nucléons.

3 Première partie. Écrire l'équation de la désintégration du noyau de polonium 210, en indiquant les lois de conservation à respecter.

Données utiles le polonium 210 émet des particules α, notées $^{4}_{2}\text{He}$; extrait de la classification : Pb ($Z = 82$), Bi ($Z = 83$), Po ($Z = 84$)

On écrit $^{210}_{84}\text{Po} \longrightarrow {}^{A}_{Z}\text{X} + {}^{4}_{2}\text{He}$.

Conservation du nombre de nucléons : $210 = A + 4$, donc $A = 206$.

Conservation de la charge électrique : $84 = Z + 2$, donc $Z = 82$.
D'après l'extrait de la classification, c'est le plomb.

$$^{210}_{84}\text{Po} \longrightarrow {}^{206}_{82}\text{Pb} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

COMPRENDRE
L'extrait du sujet attribue le symbole Th au numéro atomique 81 : c'est en réalité le thallium, Tl (Th désigne le thorium, $Z = 90$). Cette coquille est sans effet ici, le noyau fils ayant $Z = 82$.

MÉTHODE
Poser le noyau fils sous la forme ${}^{A}_{Z}\text{X}$, écrire une égalité pour les nombres du haut et une pour ceux du bas, puis chercher Z dans la classification.

1 Deuxième partie. Compléter la ligne 3 du tableau de l'annexe : valeurs de $-\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)$.

Données utiles valeurs de $\frac{N(t)}{N_0}$ mesurées tous les 40 jours : 1 ; 0,82 ; 0,67 ; 0,55 ; 0,45 ; 0,37 ; 0,30

Exemple à $t = 40$ jours : $-\ln(0{,}82) = 0{,}20$.

t (jours)	0	40	80	120	160	200	240
$N(t)/N_0$	1	0,82	0,67	0,55	0,45	0,37	0,30
$-\ln(N(t)/N_0)$	0	0,20	0,40	0,60	0,80	0,99	1,2

Ligne 3 : 0 ; 0,20 ; 0,40 ; 0,60 ; 0,80 ; 0,99 ; 1,2

PIÈGE
Utiliser la touche « log » (logarithme décimal) au lieu de « ln », ou oublier le signe moins : les valeurs doivent être positives et croissantes.

COMPRENDRE
Les rapports mesurés ont deux chiffres significatifs : on en garde deux dans la ligne 3. Cette grandeur est sans unité, comme le rapport dont on prend le logarithme.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$-\ln(0.82) \approx 0.1984509$

$-\ln(0.67) \approx 0.4004776$

$-\ln(0.55) \approx 0.597837$

$-\ln(0.45) \approx 0.7985077$

$-\ln(0.37) \approx 0.9942523$

$-\ln(0.30) \approx 1.203973$

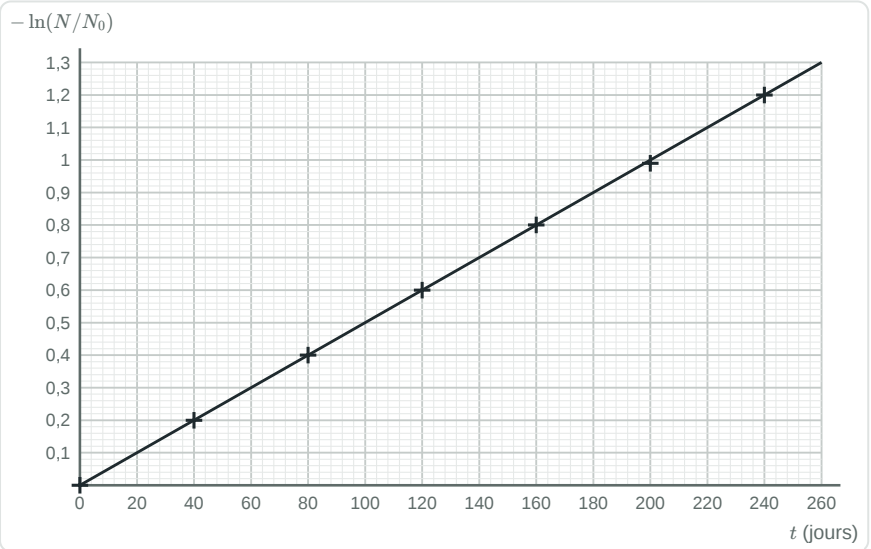
2 Deuxième partie. Tracer la courbe $-\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = f(t)$; échelle : 1 cm pour 20 jours en abscisse, 1 cm pour 0,1 en ordonnée.

Données utiles valeurs de la ligne 3 du tableau (Q1 de la deuxième partie)

On place les sept points du tableau, sans les relier entre eux. Ils sont alignés avec l'origine : on trace à la règle la droite qui passe par l'origine et au plus près de tous les points.

Le graphe est une droite passant par l'origine (voir la figure).

MÉTHODE
Sur un graphe expérimental : axes légendés avec grandeur et unité, échelle imposée respectée, points marqués par des croix, puis droite moyenne tracée à la règle et non ligne brisée.



2 · Points expérimentaux et droite passant par l'origine

3 Deuxième partie. Rappeler la loi de décroissance du nombre de noyaux non désintégrés. Est-elle en accord avec la représentation graphique précédente ? Justifier.

Loi de décroissance radioactive : $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$, où λ est la constante radioactive.

On en tire $\dfrac{N(t)}{N_0} = e^{-\lambda t}$, puis $\ln\left(\dfrac{N(t)}{N_0}\right) = -\lambda t$, soit

$$-\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = \lambda\, t$$

D'après la loi, cette grandeur est proportionnelle à t : sa représentation est une droite passant par l'origine, de coefficient directeur λ. C'est bien ce que montre le graphe.

$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$: la loi prévoit une droite passant par l'origine, en accord avec le graphe.

MÉTHODE

Pour tester une loi exponentielle, on prend le logarithme : la courbe devient une droite, facile à valider à la règle, et dont la pente donne directement la constante cherchée.

4 Deuxième partie. Calculer la pente du graphe, en déduire λ et son unité, puis la constante de temps τ et son unité. Donner l'expression de la demi-vie $t_{1/2}$ et la calculer.

Données utiles droite passant par l'origine et par le point (240 jours ; 1,2) ; $-\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = \lambda t$ (Q3 de la deuxième partie)

La pente se calcule entre deux points éloignés de la droite, l'origine et le point (240 jours ; 1,2). D'après la question précédente, elle est égale à λ :

$$\lambda = \frac{1{,}2 - 0}{240 - 0} = 5{,}0 \times 10^{-3}\ \text{j}^{-1}$$

L'ordonnée est sans unité : λ est l'inverse d'un temps, ici en jour^{-1}. En unité SI : $\lambda = \frac{1{,}2}{240 \times 24 \times 3600} = 5{,}8 \times 10^{-8}\ \text{s}^{-1}$.

Constante de temps : $\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5{,}0 \times 10^{-3}} = 2{,}0 \times 10^{2}$ j, soit $1{,}7 \times 10^{7}$ s. C'est une durée : elle s'exprime en secondes (ou ici en jours).

Demi-vie : à $t_{1/2}$, $N = \frac{N_0}{2}$, donc $\lambda\, t_{1/2} = \ln 2$:

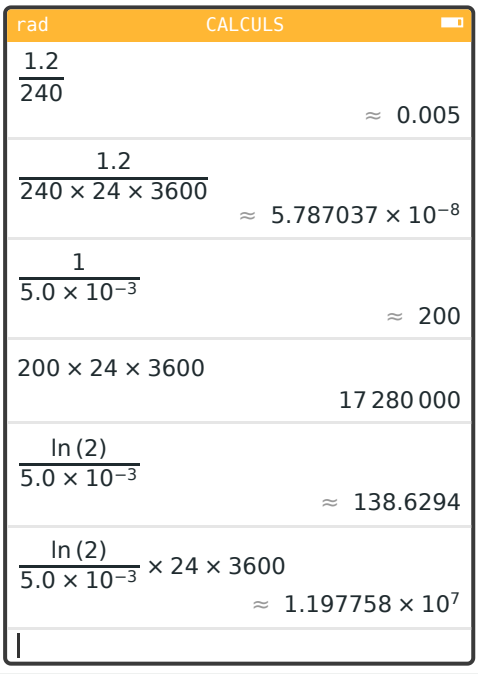
$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2 = \frac{\ln 2}{5{,}0 \times 10^{-3}} = 1{,}4 \times 10^{2}\ \text{j}$$

$\lambda = 5{,}0 \times 10^{-3}\ \text{j}^{-1}$; $\tau = 2{,}0 \times 10^{2}$ j ; $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 1{,}4 \times 10^{2}$ j, soit $1{,}2 \times 10^{7}$ s

PIÈGE
Mélanger les unités : avec λ en j^{-1}, τ et $t_{1/2}$ sortent en jours. Pour un résultat en secondes, convertir 240 jours avant de calculer la pente.

COMPRENDRE
À $t = \tau$, il reste 37 % des noyaux ; à $t = t_{1/2}$, 50 %. La demi-vie est donc plus courte que τ. La valeur admise pour le polonium 210 est 138 jours : la mesure est cohérente.

À LA CALCULATRICE



Etude d'un oscillateur

Bac S 2005 Polynésie rattrapage (ancien programme) · Exercice 3 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

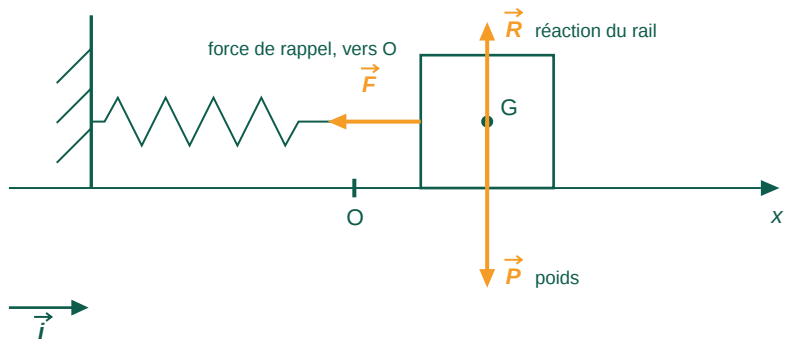
1 Partie I. Représenter sur le schéma de l'annexe les forces agissant sur la masse m.

Système : la masse m, dans le référentiel terrestre. Sans frottement, elle est soumise à trois forces :

- son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$, vertical, vers le bas, appliqué en G ;
- la réaction du rail $\vec{R}$, verticale, vers le haut (perpendiculaire au rail, puisqu'il n'y a pas de frottement) ;
- la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$, horizontale, dirigée vers O.

Trois forces : $\vec{P}$ et $\vec{R}$ verticales, de même longueur et opposées ; $\vec{F}$ horizontale, dirigée vers O.

PIÈGE
Ajouter une force « de lancement » ou une force de frottement. La masse est lâchée sans vitesse et glisse sans frottement : il n'y a que trois forces.



1 · Annexe complétée : la masse est écartée vers les x positifs, le ressort est étiré

2 Partie I. À l'aide de la deuxième loi de Newton, démontrer que l'abscisse x de G vérifie $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,x = 0$ avec $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

Système {masse m}, référentiel terrestre supposé galiléen. Deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}$$

En projection sur l'axe (Ox), $\vec{P}$ et $\vec{R}$ étant perpendiculaires à l'axe :

$$0 + 0 - k\,x = m\,a_x = m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

En divisant par m :

$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{k}{m}\,x = 0$, de la forme demandée avec $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » de la force de rappel. Si $x > 0$ (ressort étiré), la force est dirigée vers les x négatifs : $F_x = -k\,x$ dans tous les cas.

COMPRENDRE
L'oscillateur masse-ressort ne figure plus au programme actuel de spécialité. La démarche (système, référentiel, bilan des forces, projection) reste celle de toute étude de mouvement.

3 Partie I. Montrer que $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de cette équation différentielle.

On dérive deux fois :

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\,\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$ puis $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -A\,\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2\,x$

On remplace dans le premier membre de l'équation :

$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,x = -\omega_0^2\,x + \omega_0^2\,x = 0$: l'expression proposée est bien solution.

MÉTHODE
Pour vérifier qu'une fonction est solution : calculer ses dérivées, les reporter dans l'équation, constater que l'égalité est vraie à tout instant, quelles que soient les constantes A et φ.

4 Partie I. Déterminer les constantes A et φ correspondant aux conditions initiales.

Données utiles à $t = 0$: $x(0) = x_0 = 2$ cm et $\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 0$

Vitesse initiale nulle : $A\,\omega_0\cos\varphi = 0$, donc $\cos\varphi = 0$, soit $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.

Position initiale : $x_0 = A\sin\varphi$. L'amplitude A et x_0 sont positifs, donc $\sin\varphi > 0$: on garde $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, et alors $A = x_0$.

$A = x_0 = 2$ cm et $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ rad, soit $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$.

COMPRENDRE
Une équation différentielle du second ordre demande deux conditions initiales (position et vitesse) pour fixer les deux constantes. Lâcher sans vitesse depuis x_0 donne toujours un cosinus d'amplitude x_0.

5 Partie I. Exprimer la période propre T_0 des oscillations en fonction de k et m.

La fonction sinus est périodique de période 2π : $x(t + T_0) = x(t)$ impose $\omega_0\,T_0 = 2\pi$, donc $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

COMPRENDRE
T_0 ne dépend pas de l'amplitude. Elle augmente avec la masse (plus d'inertie) et diminue quand le ressort est plus raide. Unité : $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{N}^{-1}\cdot\mathrm{m} = \mathrm{s}^2$, la racine est bien en secondes.

1 Partie II. Établir l'expression du travail élémentaire δW d'une force extérieure appliquée à l'extrémité du ressort pour un allongement très petit δx, puis déterminer le travail W pour un allongement x à partir de O.

Pour maintenir le ressort allongé de x, l'opérateur exerce une force $\vec{T}$ opposée à la force de rappel : $\vec{T} = k\,x\,\vec{i}$.

Sur un déplacement très petit $\delta x\,\vec{i}$, cette force est pratiquement constante : $\delta W = \vec{T}\cdot\delta x\,\vec{i} = k\,x\,\delta x$.

Par intégration de 0 à x :

$$W = \int_0^x k\,x'\,\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

$\delta W = k\,x\,\delta x$ et $W = \dfrac{1}{2}\,k\,x^2$

PIÈGE
Écrire $W = k\,x \times x$. La force n'est pas constante : elle croît de 0 à $k\,x$ pendant l'allongement, d'où le facteur $\frac{1}{2}$.

MÉTHODE
Méthode graphique : tracer $T = k\,x$ en fonction de l'allongement. δW est l'aire d'une bande de largeur δx ; W est l'aire du triangle de base x et de hauteur $k\,x$, soit $\frac{1}{2}\,k\,x^2$.

2 Partie II. Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique du système {masse-ressort} en fonction de l'allongement x.

Le travail fourni par l'opérateur pour déformer le ressort est stocké sous forme d'énergie potentielle élastique, choisie nulle quand le ressort est au repos ($x = 0$).

$E_{pe} = \dfrac{1}{2}\,k\,x^2$

3 Partie II. Donner l'expression de l'énergie cinétique de la masse m et de l'énergie totale du système.

Avec $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ la vitesse de G : $E_c = \dfrac{1}{2} m v^2$.

Le mouvement est horizontal : l'énergie potentielle de pesanteur est constante, on la prend nulle.

$$E_m = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

4 Partie II. Quelle hypothèse permet d'affirmer que l'énergie totale reste constante ? En déduire son expression en fonction de k et de l'amplitude maximale x_0.

La masse se déplace sans frottement : aucune force ne dissipe d'énergie, l'énergie mécanique se conserve.

Elle garde donc sa valeur initiale. À $t = 0$: $x = x_0$ et $v = 0$, donc $E_c = 0$.

$$E_m = \frac{1}{2} k x_0^2 \text{ à chaque instant.}$$

COMPRENDRE
L'énergie passe sans cesse d'une forme à l'autre : toute potentielle aux extrémités ($x = \pm x_0$, vitesse nulle), toute cinétique au passage par O, où la vitesse est maximale.

1 Partie III. Calculer la période propre T_0 pour la molécule de chlorure d'hydrogène.

Données utiles $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$; $M = 1{,}00\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $k = 510\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$

La masse qui oscille est celle d'un atome d'hydrogène : $m = \dfrac{M}{N_A}$, avec $M = 1{,}00 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

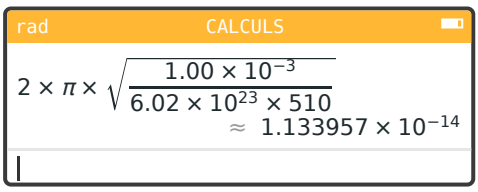
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{N_A\, k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}00 \times 10^{-3}}{6{,}02 \times 10^{23} \times 510}}$$

$$T_0 = 1{,}13 \times 10^{-14}\ \text{s}$$

PIÈGE
Laisser la masse molaire en grammes par mole. Avec k en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, la masse doit être en kilogrammes, sinon T_0 est faussée d'un facteur $\sqrt{1000} \approx 32$.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme M, N_A et k. Garder la valeur non arrondie en mémoire pour les questions suivantes.

À LA CALCULATRICE



2 Partie III. Pour quelle valeur de la fréquence ν de l'onde électromagnétique excitatrice observera-t-on la résonance ?

Données utiles $T_0 = 1{,}13 \times 10^{-14}$ s (Q1, valeur non arrondie conservée)

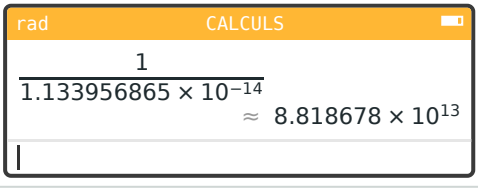
Il y a résonance quand la fréquence de l'excitateur est égale à la fréquence propre du résonateur :

$$\nu = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{1{,}134 \times 10^{-14}}$$

$$\nu = 8{,}82 \times 10^{13}\ \text{Hz}$$

PIÈGE
Calculer avec T_0 arrondie à $1{,}13 \times 10^{-14}$ s donne $8{,}85 \times 10^{13}$ Hz : le dernier chiffre est faux. On arrondit seulement le résultat final.

À LA CALCULATRICE



3 Partie III. Calculer la longueur d'onde dans le vide correspondant à cette fréquence et en déduire le domaine de radiation de l'onde excitatrice.

Données utiles $c = 3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\nu = 8{,}82 \times 10^{13}$ Hz (Q2)

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3{,}00 \times 10^{8}}{8{,}82 \times 10^{13}} = 3{,}40 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

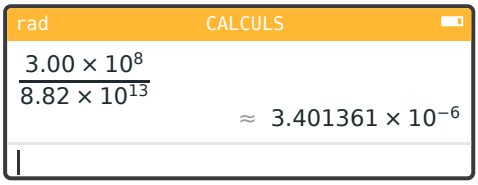
Le domaine visible s'étend de 400 nm à 800 nm environ, soit de 0,400 µm à 0,800 µm. Ici $\lambda = 3{,}40$ µm est supérieure à 0,800 µm.

$\lambda = 3{,}40 \times 10^{-6}\ \text{m} = 3{,}40$ µm : l'onde excitatrice appartient au domaine **infrarouge**.

COMPRENDRE

C'est le principe de la spectroscopie infrarouge, toujours au programme : une liaison absorbe le rayonnement dont la fréquence est celle de sa vibration. Chaque type de liaison a sa bande d'absorption.

À LA CALCULATRICE



4 Partie III. On remplace l'hydrogène par le deutérium $^{2}_{1}\text{H}$, de masse double ; que devient la fréquence propre de vibration ?

Données utiles $\nu = 8{,}82 \times 10^{13}$ Hz (Q2)

Avec $m' = 2\,m$ et la même constante de raideur k :

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{2\,m}{k}} = \sqrt{2}\,T_0 \qquad \text{donc} \qquad \nu' = \frac{1}{T_0'} = \frac{\nu}{\sqrt{2}}$$

$$\nu' = \frac{8{,}82 \times 10^{13}}{\sqrt{2}} = 6{,}24 \times 10^{13}\ \text{Hz}$$

La fréquence propre est divisée par $\sqrt{2}$: $\nu' = \dfrac{\nu}{\sqrt{2}} = 6{,}24 \times 10^{13}$ Hz

PIÈGE

Répondre que la fréquence est divisée par 2. La masse est sous une racine carrée : doubler m multiplie la période par $\sqrt{2}$ seulement.

À LA CALCULATRICE

