Etude d'un oscillateur

Bac S 2005 Polynésie rattrapage (ancien programme) · Exercice 3 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

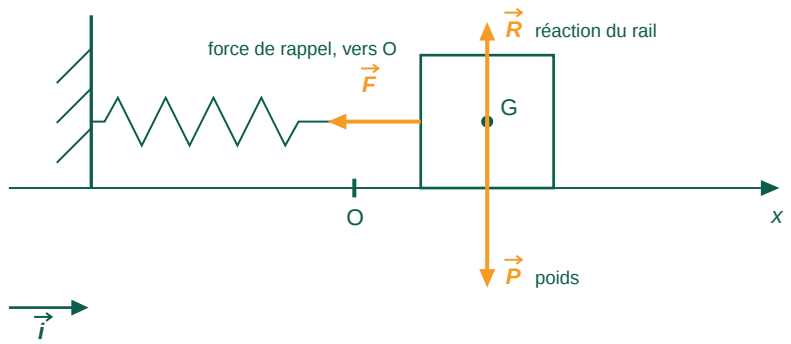
1 Partie I. Représenter sur le schéma de l'annexe les forces agissant sur la masse m.

Système : la masse m, dans le référentiel terrestre. Sans frottement, elle est soumise à trois forces :

- son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$, vertical, vers le bas, appliqué en G ;
- la réaction du rail $\vec{R}$, verticale, vers le haut (perpendiculaire au rail, puisqu'il n'y a pas de frottement) ;
- la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$, horizontale, dirigée vers O.

Trois forces : $\vec{P}$ et $\vec{R}$ verticales, de même longueur et opposées ; $\vec{F}$ horizontale, dirigée vers O.

PIÈGE
Ajouter une force « de lancement » ou une force de frottement. La masse est lâchée sans vitesse et glisse sans frottement : il n'y a que trois forces.



1 · Annexe complétée : la masse est écartée vers les x positifs, le ressort est étiré

2 Partie I. À l'aide de la deuxième loi de Newton, démontrer que l'abscisse x de G vérifie $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,x = 0$ avec $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

Système {masse m}, référentiel terrestre supposé galiléen. Deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}$$

En projection sur l'axe (Ox), $\vec{P}$ et $\vec{R}$ étant perpendiculaires à l'axe :

$$0 + 0 - k\,x = m\,a_x = m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

En divisant par m :

$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{k}{m}\,x = 0$, de la forme demandée avec $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » de la force de rappel. Si $x > 0$ (ressort étiré), la force est dirigée vers les x négatifs : $F_x = -k\,x$ dans tous les cas.

COMPRENDRE
L'oscillateur masse-ressort ne figure plus au programme actuel de spécialité. La démarche (système, référentiel, bilan des forces, projection) reste celle de toute étude de mouvement.

3 Partie I. Montrer que $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de cette équation différentielle.

On dérive deux fois :

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\,\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$ puis $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -A\,\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2\,x$

On remplace dans le premier membre de l'équation :

$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,x = -\omega_0^2\,x + \omega_0^2\,x = 0$: l'expression proposée est bien solution.

MÉTHODE
Pour vérifier qu'une fonction est solution : calculer ses dérivées, les reporter dans l'équation, constater que l'égalité est vraie à tout instant, quelles que soient les constantes A et φ.

4 Partie I. Déterminer les constantes A et φ correspondant aux conditions initiales.

Données utiles à $t = 0$: $x(0) = x_0 = 2$ cm et $\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 0$

Vitesse initiale nulle : $A\,\omega_0\cos\varphi = 0$, donc $\cos\varphi = 0$, soit $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.

Position initiale : $x_0 = A\sin\varphi$. L'amplitude A et x_0 sont positifs, donc $\sin\varphi > 0$: on garde $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, et alors $A = x_0$.

$A = x_0 = 2$ cm et $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ rad, soit $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$.

COMPRENDRE
Une équation différentielle du second ordre demande deux conditions initiales (position et vitesse) pour fixer les deux constantes. Lâcher sans vitesse depuis x_0 donne toujours un cosinus d'amplitude x_0.

5 Partie I. Exprimer la période propre T_0 des oscillations en fonction de k et m.

La fonction sinus est périodique de période 2π : $x(t + T_0) = x(t)$ impose $\omega_0\,T_0 = 2\pi$, donc $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

COMPRENDRE
T_0 ne dépend pas de l'amplitude. Elle augmente avec la masse (plus d'inertie) et diminue quand le ressort est plus raide. Unité : $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{N}^{-1}\cdot\mathrm{m} = \mathrm{s}^2$, la racine est bien en secondes.

1 Partie II. Établir l'expression du travail élémentaire δW d'une force extérieure appliquée à l'extrémité du ressort pour un allongement très petit δx, puis déterminer le travail W pour un allongement x à partir de O.

Pour maintenir le ressort allongé de x, l'opérateur exerce une force $\vec{T}$ opposée à la force de rappel : $\vec{T} = k\,x\,\vec{i}$.

Sur un déplacement très petit $\delta x\,\vec{i}$, cette force est pratiquement constante : $\delta W = \vec{T}\cdot\delta x\,\vec{i} = k\,x\,\delta x$.

Par intégration de 0 à x :

$$W = \int_0^x k\,x'\,\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

$\delta W = k\,x\,\delta x$ et $W = \dfrac{1}{2}\,k\,x^2$

PIÈGE
Écrire $W = k\,x \times x$. La force n'est pas constante : elle croît de 0 à $k\,x$ pendant l'allongement, d'où le facteur $\frac{1}{2}$.

MÉTHODE
Méthode graphique : tracer $T = k\,x$ en fonction de l'allongement. δW est l'aire d'une bande de largeur δx ; W est l'aire du triangle de base x et de hauteur $k\,x$, soit $\frac{1}{2}\,k\,x^2$.

2 Partie II. Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique du système {masse-ressort} en fonction de l'allongement x.

Le travail fourni par l'opérateur pour déformer le ressort est stocké sous forme d'énergie potentielle élastique, choisie nulle quand le ressort est au repos ($x = 0$).

$E_{pe} = \dfrac{1}{2}\,k\,x^2$

3 Partie II. Donner l'expression de l'énergie cinétique de la masse m et de l'énergie totale du système.

Avec $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ la vitesse de G : $E_c = \dfrac{1}{2} m v^2$.

Le mouvement est horizontal : l'énergie potentielle de pesanteur est constante, on la prend nulle.

$$E_m = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

4 Partie II. Quelle hypothèse permet d'affirmer que l'énergie totale reste constante ? En déduire son expression en fonction de k et de l'amplitude maximale x_0.

La masse se déplace sans frottement : aucune force ne dissipe d'énergie, l'énergie mécanique se conserve.

Elle garde donc sa valeur initiale. À $t = 0$: $x = x_0$ et $v = 0$, donc $E_c = 0$.

$$E_m = \frac{1}{2} k x_0^2 \text{ à chaque instant.}$$

COMPRENDRE
L'énergie passe sans cesse d'une forme à l'autre : toute potentielle aux extrémités ($x = \pm x_0$, vitesse nulle), toute cinétique au passage par O, où la vitesse est maximale.

1 Partie III. Calculer la période propre T_0 pour la molécule de chlorure d'hydrogène.

Données utiles $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$; $M = 1{,}00\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $k = 510\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$

La masse qui oscille est celle d'un atome d'hydrogène : $m = \dfrac{M}{N_A}$, avec $M = 1{,}00 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

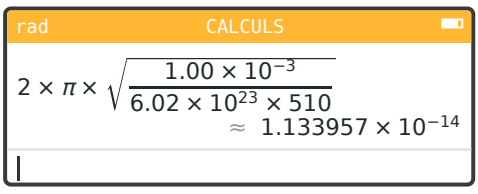
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{N_A\, k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}00 \times 10^{-3}}{6{,}02 \times 10^{23} \times 510}}$$

$$T_0 = 1{,}13 \times 10^{-14}\ \text{s}$$

PIÈGE
Laisser la masse molaire en grammes par mole. Avec k en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, la masse doit être en kilogrammes, sinon T_0 est faussée d'un facteur $\sqrt{1000} \approx 32$.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme M, N_A et k. Garder la valeur non arrondie en mémoire pour les questions suivantes.

À LA CALCULATRICE



2 Partie III. Pour quelle valeur de la fréquence ν de l'onde électromagnétique excitatrice observera-t-on la résonance ?

Données utiles $T_0 = 1{,}13 \times 10^{-14}$ s (Q1, valeur non arrondie conservée)

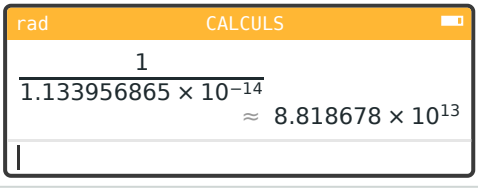
Il y a résonance quand la fréquence de l'excitateur est égale à la fréquence propre du résonateur :

$$\nu = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{1{,}134 \times 10^{-14}}$$

$$\nu = 8{,}82 \times 10^{13}\ \text{Hz}$$

PIÈGE
Calculer avec T_0 arrondie à $1{,}13 \times 10^{-14}$ s donne $8{,}85 \times 10^{13}$ Hz : le dernier chiffre est faux. On arrondit seulement le résultat final.

À LA CALCULATRICE



3 Partie III. Calculer la longueur d'onde dans le vide correspondant à cette fréquence et en déduire le domaine de radiation de l'onde excitatrice.

Données utiles $c = 3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\nu = 8{,}82 \times 10^{13}$ Hz (Q2)

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3{,}00 \times 10^{8}}{8{,}82 \times 10^{13}} = 3{,}40 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

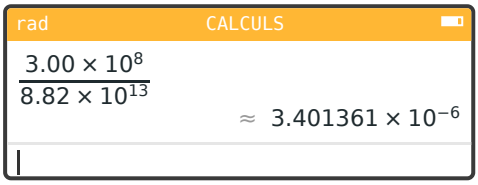
Le domaine visible s'étend de 400 nm à 800 nm environ, soit de 0,400 µm à 0,800 µm. Ici $\lambda = 3{,}40$ µm est supérieure à 0,800 µm.

$\lambda = 3{,}40 \times 10^{-6}\ \text{m} = 3{,}40$ µm : l'onde excitatrice appartient au domaine **infrarouge**.

COMPRENDRE

C'est le principe de la spectroscopie infrarouge, toujours au programme : une liaison absorbe le rayonnement dont la fréquence est celle de sa vibration. Chaque type de liaison a sa bande d'absorption.

À LA CALCULATRICE



4 Partie III. On remplace l'hydrogène par le deutérium $^{2}_{1}\text{H}$, de masse double ; que devient la fréquence propre de vibration ?

Données utiles $\nu = 8{,}82 \times 10^{13}$ Hz (Q2)

Avec $m' = 2\,m$ et la même constante de raideur k :

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{2\,m}{k}} = \sqrt{2}\,T_0 \qquad \text{donc} \qquad \nu' = \frac{1}{T_0'} = \frac{\nu}{\sqrt{2}}$$

$$\nu' = \frac{8{,}82 \times 10^{13}}{\sqrt{2}} = 6{,}24 \times 10^{13}\ \text{Hz}$$

La fréquence propre est divisée par $\sqrt{2}$: $\nu' = \dfrac{\nu}{\sqrt{2}} = 6{,}24 \times 10^{13}$ Hz

PIÈGE

Répondre que la fréquence est divisée par 2. La masse est sous une racine carrée : doubler m multiplie la période par $\sqrt{2}$ seulement.

À LA CALCULATRICE

