# Recherche d'un modèle de force de frottement

Bac S 2005 La Réunion (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

**A.1** À l'aide des documents 1 et 2, préciser les caractéristiques du mouvement de la bille entre $M_{15}$ et $M_{21}$. Quelle loi de Newton est ainsi illustrée ?

Document 1 : les positions de la bille sont alignées sur une verticale, la trajectoire est une droite.

Document 2 : de $M_{15}$ à $M_{20}$, la vitesse garde la même valeur, $v = 0{,}95\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le vecteur vitesse est donc constant : dans le référentiel terrestre, les forces qui s'exercent sur la bille se compensent.

Mouvement rectiligne uniforme, qui illustre la première loi de Newton (principe d'inertie).

**PIÈGE**

Répondre seulement « uniforme ». Il faut les deux adjectifs : rectiligne (document 1) et uniforme (document 2), chacun justifié par son document.

**A.2** À partir des conditions de prise de vue, justifier les valeurs de la colonne temps $t$ (ms) du document 2.

**Données utiles** 50 images par seconde

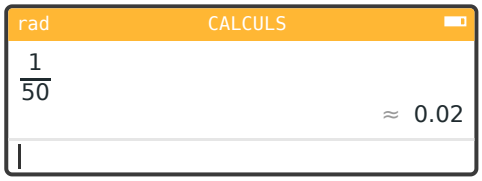
Le caméscope enregistre 50 images par seconde. La durée qui sépare deux images consécutives est :

$$\tau = \frac{1}{50} = 0{,}020\ \text{s} = 20\ \text{ms}$$

L'image de $M_0$ est prise à $t_0 = 0$, donc la position $M_n$ est repérée à la date $t_n = n \times 20\ \text{ms}$.

$\tau = 20\ \text{ms}$ : les dates augmentent de 20 ms d'une ligne à la suivante.

**À LA CALCULATRICE**




**B.1** Calculer la vitesse de la bille pour la position $M_6$, en précisant la méthode employée.

**Données utiles** $y_5 = 41{,}0\ \text{mm}$ à $t_5 = 100\ \text{ms}$ ; $y_7 = 69{,}0\ \text{mm}$ à $t_7 = 140\ \text{ms}$

Méthode : la vitesse en $M_6$ est assimilée à la vitesse moyenne entre les deux positions qui l'encadrent, $M_5$ et $M_7$.

$$v_6 = \frac{y_7 - y_5}{t_7 - t_5} = \frac{(69{,}0 - 41{,}0) \times 10^{-3}}{(140 - 100) \times 10^{-3}}$$

$v_6 = 0{,}70\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

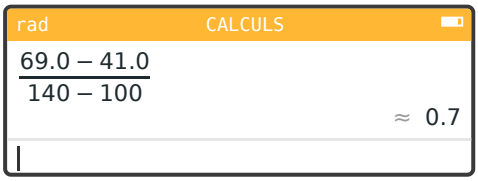
**PIÈGE**

Calculer $\frac{y_6}{t_6}$ : c'est la vitesse moyenne depuis le départ ($0{,}44\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$), pas la vitesse à la date $t_6$.

**COMPRENDRE**

Deux chiffres significatifs, comme les autres vitesses du tableau. La valeur s'insère bien entre $v_5 = 0{,}64$ et $v_7 = 0{,}75\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

**À LA CALCULATRICE**



**B.2** Calculer l'accélération de la bille pour la position $M_{18}$, en précisant la méthode. Le résultat est-il compatible avec celui du A.1 ?

**Données utiles** $v_{17} = v_{19} = 0{,}95\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ; $t_{17} = 340\ \text{ms}$ ; $t_{19} = 380\ \text{ms}$

Méthode : le mouvement est rectiligne, tous les vecteurs vitesse ont même direction et même sens ; on raisonne sur les valeurs. L'accélération en $M_{18}$ est assimilée à l'accélération moyenne entre $M_{17}$ et $M_{19}$.

$$a_{18} = \frac{v_{19} - v_{17}}{t_{19} - t_{17}} = \frac{0{,}95 - 0{,}95}{(380 - 340) \times 10^{-3}} = 0$$

Une accélération nulle signifie un vecteur vitesse constant, donc un mouvement rectiligne uniforme : d'après la deuxième loi de Newton, la somme des forces est alors nulle, comme l'exige le principe d'inertie.

$a_{18} = 0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ : résultat compatible avec le mouvement rectiligne uniforme du A.1.

**MÉTHODE**
Même schéma qu'au B.1, un cran plus loin : la vitesse se calcule avec les positions voisines, l'accélération avec les vitesses voisines, toujours sur l'intervalle de $2\tau = 40\ \text{ms}$.

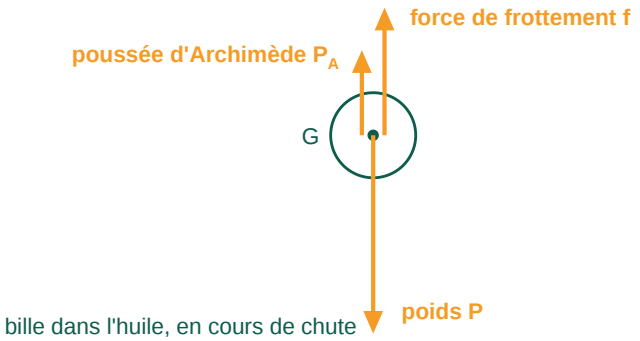
**C.1** Sur un schéma, représenter sans souci d'échelle toutes les forces s'exerçant au centre d'inertie G de la bille tombant dans l'huile.

Système {bille}, référentiel terrestre supposé galiléen. Trois forces, toutes verticales, s'appliquent en G :

- le poids $\vec{P}$, vers le bas ;
- la poussée d'Archimède $\vec{P}_A$, vers le haut ;
- la force de frottement $\vec{f}$ exercée par l'huile, opposée au mouvement, donc vers le haut.

Trois forces : $\vec{P}$ vers le bas, $\vec{P}_A$ et $\vec{f}$ vers le haut.

**COMPRENDRE**
Sur le schéma, les deux flèches vers le haut sont décalées pour rester lisibles : elles partent en réalité toutes deux de G. Tant que la bille accélère, $P > P_A + f$.




**C.1** · Forces s'exerçant sur la bille pendant sa chute

**C.2** Calculer la masse $m$ de la bille.

**Données utiles** $V = 0{,}52\ \text{cm}^3$ ; $\rho_A = 7850\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

$m = \rho_A \times V$, avec $V = 0{,}52\ \text{cm}^3 = 0{,}52 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$.

$$m = 7850 \times 0{,}52 \times 10^{-6}$$

$m = 4{,}1 \times 10^{-3}\ \text{kg}$, soit $4{,}1\ \text{g}$

**PIÈGE**
La conversion du volume : $1\ \text{cm}^3 = 10^{-6}\ \text{m}^3$, et non $10^{-3}$ ou $10^{-2}\ \text{m}^3$. Sans elle, la masse trouvée est fausse d'un facteur un million.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$7850 \times 0.52 \times 10^{-6}$

$\approx$ 0.004082

**C.3** Donner l'expression littérale de la poussée d'Archimède $P_A$ s'exerçant sur la bille plongée dans l'huile. Calculer sa valeur.

**Données utiles** $\rho_H = 920\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ; $V = 0{,}52 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$ ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

La valeur de la poussée d'Archimède est égale au poids du volume d'huile déplacé par la bille, entièrement immergée :

$$P_A = \rho_H \times V \times g = 920 \times 0{,}52 \times 10^{-6} \times 9{,}8$$

$\boxed{P_A = 4{,}7 \times 10^{-3}\ \text{N}}$

**PIÈGE**
Utiliser la masse volumique de l'acier : la poussée dépend du fluide déplacé, donc de $\rho_H$. Avec $\rho_A$, on retrouverait le poids de la bille.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$920 \times 0.52 \times 10^{-6} \times 9.8$

$\approx$ 0.00468832

**D.1** En appliquant le théorème du centre d'inertie, que l'on énoncera, établir que le mouvement de la bille obéit à une équation différentielle du type $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{f}{m} = A$, où $A$ est une constante.

Théorème du centre d'inertie : dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie, $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}_G$.

Pour la bille : $\vec{P} + \vec{P}_A + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$.

Projection sur un axe vertical orienté vers le bas, avec $a_G = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ :

$$P - P_A - f = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

En divisant par $m$ : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{f}{m} = \dfrac{P - P_A}{m}$. Le poids, la poussée d'Archimède et la masse ne varient pas pendant la chute, le second membre est donc une constante.

$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{f}{m} = A \text{ avec } A = \dfrac{P - P_A}{m}}$

**PIÈGE**
Les signes à la projection : avec l'axe vers le bas, seul le poids est compté positivement. Un signe faux sur $P_A$ ou $f$ fausse toute la suite.

**COMPRENDRE**
« Théorème du centre d'inertie » est l'ancien nom de la deuxième loi de Newton appliquée au centre de masse : même énoncé, même relation.

**D.2** Donner l'expression littérale de $A$, calculer sa valeur et préciser son unité.

**Données utiles** $\rho_A = 7850\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ; $\rho_H = 920\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Avec $P = m\,g = \rho_A V g$ et $P_A = \rho_H V g$ :

$$A = \frac{P - P_A}{m} = \frac{\rho_A V g - \rho_H V g}{\rho_A V} = g \times \frac{\rho_A - \rho_H}{\rho_A}$$

$$A = 9{,}8 \times \frac{7850 - 920}{7850}$$

Dans l'équation, $A$ s'ajoute à $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ : elle a l'unité d'une accélération.

$\boxed{A = 8{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$

**COMPRENDRE**
À $t = 0$, $v = 0$ donc $f = 0$ : $A$ est l'accélération initiale de la bille. Elle est inférieure à $g$ à cause de la poussée d'Archimède.

**MÉTHODE**
Simplifier par $V$ avant le calcul : le résultat ne dépend plus que de $g$ et des masses volumiques, sans réutiliser les valeurs arrondies de $m$ et de $P_A$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{9.8 \times (7850 - 920)}{7850} \approx 8.651465$$

**E.1** Première hypothèse, $f = k_1\, v$. a) Montrer que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + B_1\, v = A$. b) Que devient $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ à la vitesse limite ? En déduire $B_1$ en fonction de $A$ et $v_{lim}$, puis calculer $k_1$ et préciser son unité.

**Données utiles** $v_{lim} = 0{,}95\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ ; $m = 4{,}1 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg}$ (C.2) ; $A = 8{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ (D.2)

a) On remplace $f$ par $k_1\, v$ dans l'équation du D.1 :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{k_1}{m} v = A$$

Cette équation a bien la forme $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + B_1\, v = A$ avec $B_1 = \frac{k_1}{m}$.

b) Quand $v = v_{lim}$, la vitesse ne varie plus : $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$.

L'équation se réduit à $B_1\, v_{lim} = A$, d'où $B_1 = \frac{A}{v_{lim}}$.

Comme $B_1 = \frac{k_1}{m}$ :

$$k_1 = m\, B_1 = \frac{m\, A}{v_{lim}} = \frac{4{,}08 \times 10^{-3} \times 8{,}65}{0{,}95}$$

Unité : $\mathrm{kg} \times \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ divisé par $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, soit $\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$.

a) $B_1 = \frac{k_1}{m}$ ; b) $B_1 = \frac{A}{v_{lim}}$ et $k_1 = 3{,}7 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$

**PIÈGE**
Oublier l'unité de $k_1$, explicitement demandée. On la trouve aussi avec $f = k_1 v$ : des newtons divisés par des $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, soit $\mathrm{N \cdot s \cdot m^{-1}} = \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$.

**COMPRENDRE**
À la vitesse limite, le frottement compense exactement $P - P_A$ : on retrouve le mouvement uniforme du A.1. Le calcul est mené avec les valeurs non arrondies de $m$ et de $A$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{4.082 \times 10^{-3} \times 8.651464968}{0.95} \approx 0.03717398$$

**E.2** Deuxième hypothèse, $f = k_2\, v^2$, avec l'équation $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + B_2\, v^2 = A$ : exprimer $B_2$ en fonction de $A$ et $v_{lim}$, puis calculer $k_2$ et préciser son unité.

**Données utiles** $v_{lim} = 0{,}95\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ ; $m = 4{,}1 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg}$ (C.2) ; $A = 8{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ (D.2)

En remplaçant $f$ par $k_2\, v^2$ dans l'équation du D.1 : $B_2 = \frac{k_2}{m}$.

Quand $v = v_{lim}$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, donc $B_2\, v_{lim}^2 = A$, d'où $B_2 = \frac{A}{v_{lim}^2}$.

$$k_2 = m\, B_2 = \frac{m\, A}{v_{lim}^2} = \frac{4{,}08 \times 10^{-3} \times 8{,}65}{0{,}95^2}$$

Unité : $\mathrm{kg} \times \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ divisé par $\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$, soit $\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$.

$B_2 = \frac{A}{v_{lim}^2}$ et $k_2 = 3{,}9 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg \cdot m^{-1}}$

**PIÈGE**
Enchaîner les arrondis : avec $m = 4{,}1 \times 10^{-3}$ kg et $A = 8{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, on obtient $4{,}0 \times 10^{-2}$. Garder les valeurs intermédiaires en mémoire dans la calculatrice.

**COMPRENDRE**
$k_1$ et $k_2$ ont des valeurs numériques proches mais des unités différentes : on ne peut pas les comparer entre elles.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{4.082 \times 10^{-3} \times 8.651464968}{0.95^2} \approx 0.0391305$$

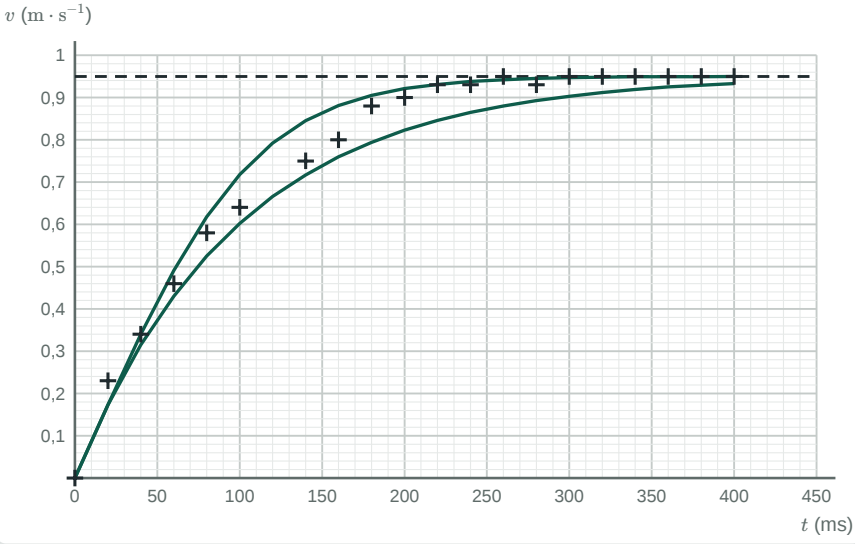
**E.3** À l'aide du document 3, préciser sous forme d'encadrements les domaines de vitesse pour lesquels chacun des deux modèles semble coïncider le mieux avec les points expérimentaux.

**Données utiles** document 3 ; $v_{lim} = 0{,}95\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Jusqu'à $v \approx 0{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (dates inférieures à 160 ms environ), les points expérimentaux restent plus proches de la courbe du modèle n°1 ; au tout début, les deux courbes sont d'ailleurs presque confondues.

Au-delà, de $0{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ à la vitesse limite, les points rejoignent la courbe du modèle n°2, alors que le modèle n°1 tend trop lentement vers $v_{lim}$.

Modèle n°1 ($f = k_1 v$) : $0 \leqslant v \leqslant 0{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ; modèle n°2 ($f = k_2 v^2$) : $0{,}8 \leqslant v \leqslant 0{,}95\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$




**E.3** · Document 3 reconstitué : points expérimentaux, modèle n°1 (courbe du bas) et modèle n°2 (courbe du haut)

**COMPRENDRE**

Aucun des deux modèles ne convient sur toute la chute : un frottement proportionnel à $v$ décrit mieux les faibles vitesses, un frottement en $v^2$ les vitesses élevées.

**MÉTHODE**

La question porte sur des vitesses, pas sur des dates : repérer sur l'axe horizontal où les points changent de courbe, puis lire la vitesse correspondante sur l'axe vertical.