La grêle

Bac S 2005 Amérique du Nord (ancien programme) · Exercice 4 **4 points** **Durée conseillée 52 min**

1 Partie A (chute libre). À l'aide de la deuxième loi de Newton, établir les équations horaires de la vitesse et de la position du centre d'inertie G du grêlon.

Données utiles axe Oz vertical orienté vers le bas, origine O ; à $t = 0$: $z = 0$ et $v = 0$

Système {grêlon}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen. En chute libre, la seule force est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}_0$.

Deuxième loi de Newton : $m\,\vec{g}_0 = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}_0$. En projection sur Oz (vers le bas) : $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = g_0$.

On cherche une primitive : $v_z = g_0\,t + C_1$. Comme $v_z(0) = 0$, $C_1 = 0$.

Puis $v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ donne $z = \dfrac{1}{2}\,g_0\,t^2 + C_2$. Comme $z(0) = 0$, $C_2 = 0$.

$$v_z(t) = g_0\,t \qquad \text{et} \qquad z(t) = \frac{1}{2}\,g_0\,t^2$$

PIÈGE
L'axe est orienté vers le bas : $a_z = +g_0$, sans signe « moins ». Avec le réflexe d'un axe vers le haut, toutes les équations changent de signe.

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi, projection sur l'axe, puis deux primitives successives. Chaque constante se détermine avec une condition initiale, écrite explicitement.

2 Calculer la vitesse du grêlon à son arrivée au sol. Ce résultat est-il vraisemblable ?

Données utiles altitude de départ $h = 1500$ m ; $g_0 = 9{,}80\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; d'après le texte, vitesse au sol jusqu'à $160\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$

Le grêlon touche le sol quand $z = h$: $\dfrac{1}{2}\,g_0\,t_s^2 = h$, soit $t_s = \sqrt{\dfrac{2h}{g_0}}$.

Sa vitesse est alors $v_s = g_0\,t_s = g_0\sqrt{\dfrac{2h}{g_0}} = \sqrt{2\,g_0\,h}$.

$$v_s = \sqrt{2 \times 9{,}80 \times 1500} = 171\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

En kilomètres par heure : $v_s = 171 \times 3{,}6 = 617\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

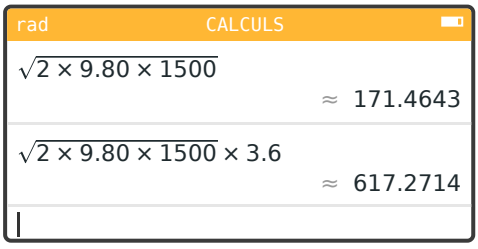
Cette valeur est presque quatre fois supérieure à la vitesse maximale observée au sol ($160\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$) : elle n'est pas vraisemblable. Le modèle de la chute libre ne convient pas, l'action de l'air ne peut pas être négligée.

$v_s = \sqrt{2\,g_0\,h} = 171\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 617\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$: résultat non vraisemblable.

PIÈGE
« Justifier » demande une comparaison chiffrée avec la donnée du texte. Écrire seulement « c'est trop grand » ne rapporte pas les points.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme g_0. Pour comparer deux vitesses, il faut la même unité : on multiplie par 3,6 pour passer des $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ aux $\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

À LA CALCULATRICE



1 Partie B (chute réelle). Par une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité du coefficient K de la force de frottement $F = K\,v^2$ dans le Système international.

$K = \dfrac{F}{v^2}$. Une force est le produit d'une masse par une accélération ($F = m\,a$) : le newton équivaut au $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, soit $[F] = M\cdot L\cdot T^{-2}$. Pour une vitesse, $[v] = L\cdot T^{-1}$.

$$[K] = \frac{M\cdot L\cdot T^{-2}}{L^2\cdot T^{-2}} = M\cdot L^{-1}$$

K s'exprime en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

MÉTHODE
Pour l'unité d'un coefficient : l'isoler, puis remplacer chaque grandeur par sa dimension (M, L, T). Le newton se décompose toujours à partir de $F = m\,a$.

2 Donner l'expression de la valeur de la poussée d'Archimède, la calculer, la comparer à celle du poids et conclure.

Données utiles $\rho = 1{,}3\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ (air) ; diamètre 3,0 cm, donc $r = 1{,}5\times10^{-2}$ m ; $m = 13\ \mathrm{g} = 1{,}3\times10^{-2}$ kg ; $g_0 = 9{,}80\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

La poussée d'Archimède a pour valeur le poids du volume d'air déplacé par le grêlon :

$$F_A = \rho\,V\,g_0 = \rho\times\frac{4}{3}\pi\,r^3\times g_0$$

$$F_A = 1{,}3\times\frac{4}{3}\pi\times(1{,}5\times10^{-2})^3\times 9{,}80 = 1{,}8\times10^{-4}\ \mathrm{N}$$

Poids du grêlon : $P = m\,g_0 = 1{,}3\times10^{-2}\times9{,}80 = 0{,}13\ \mathrm{N}$.

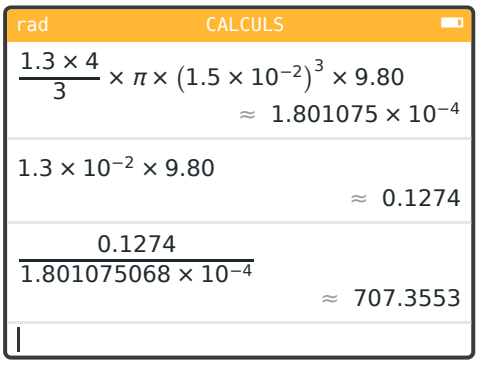
Rapport : $\dfrac{P}{F_A} = \dfrac{0{,}13}{1{,}8\times10^{-4}} \approx 7\times10^2$.

$F_A = 1{,}8\times10^{-4}$ N, environ 700 fois plus petite que $P = 0{,}13$ N : la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids.

PIÈGE
Trois erreurs classiques : prendre la masse volumique de la glace au lieu de celle de l'air, utiliser le diamètre à la place du rayon, laisser les centimètres et les grammes sans les convertir.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme ρ, m et le diamètre. Le rapport P/F_A est aussi celui des masses volumiques de la glace et de l'air : il ne dépend pas de la taille du grêlon.

À LA CALCULATRICE



3 La poussée d'Archimède est négligée. a) Établir l'équation différentielle et l'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - B\,v^2$. b) Déterminer a_4 et v_5 (méthode d'Euler). c) Exprimer puis calculer la vitesse limite. d) La retrouver sur la courbe.

Données utiles $A = 9{,}80\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $B = 1{,}56\times10^{-2}\ \mathrm{m^{-1}}$; pas $\Delta t = 0{,}5$ s ; tableau : $v_4 = 17{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ à $t = 2{,}00$ s

a) Même système, même référentiel. Forces : le poids $\vec{P}$, vertical vers le bas, et le frottement $\vec{F}$, vertical vers le haut (opposé au mouvement), de valeur $K\,v^2$.

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{a}$. En projection sur Oz : $m\,g_0 - K\,v^2 = m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g_0 - \dfrac{K}{m}\,v^2$, de la forme $A - B\,v^2$ avec $A = g_0$ et $B = \dfrac{K}{m}$.

b) L'équation différentielle donne l'accélération à chaque date : $a_i = A - B\,v_i^2$.

$a_4 = 9{,}80 - 1{,}56\times10^{-2}\times17{,}2^2 = 5{,}18\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

Méthode d'Euler : $v_{i+1} = v_i + a_i\,\Delta t$.

$v_5 = v_4 + a_4\,\Delta t = 17{,}2 + 5{,}18\times0{,}5 = 19{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$a_4 = 5{,}18\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $v_5 = 19{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

c) Quand la vitesse limite est atteinte, v ne varie plus : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, donc $A - B\,v_{\lim}^2 = 0$.

$$v_{\lim} = \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{9{,}80}{1{,}56\times10^{-2}}} = 25{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$v_{\lim} = \sqrt{\dfrac{A}{B}} = 25{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, soit environ $90\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$

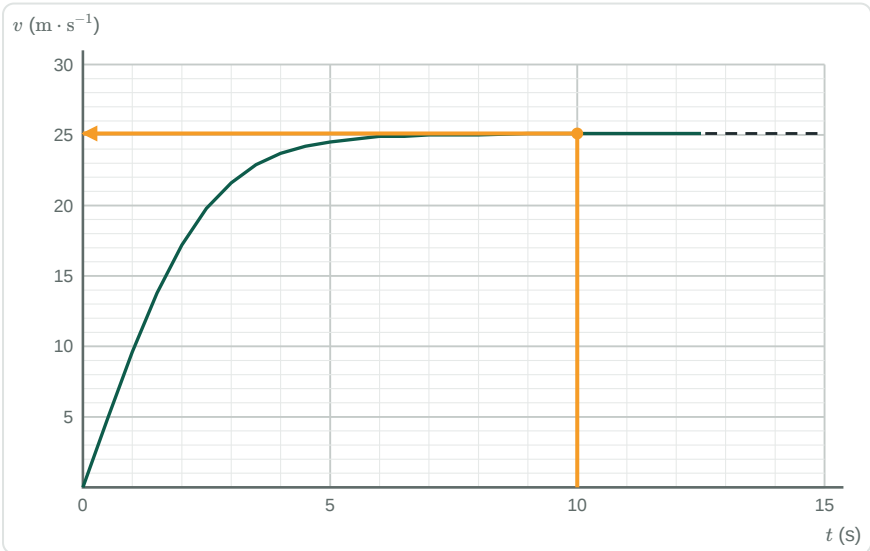
d) À partir de $t \approx 7$ s, la courbe se confond avec une droite horizontale : c'est son asymptote. On la trace et on lit son ordonnée.

Lecture graphique : $v_{\lim} \approx 25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, en accord avec la valeur calculée.

PIÈGE
Calculer v_5 avec $a_5 = 3{,}69$ au lieu de a_4 : c'est l'accélération au début de l'intervalle qui sert. Autre oubli fréquent : le carré de v_4.

COMPRENDRE
Avec le frottement, la vitesse au sol tombe de 617 à environ $90\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$, valeur compatible avec le maximum de $160\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ du texte : ce modèle est réaliste.

MÉTHODE
Euler en deux temps, à répéter ligne après ligne : l'équation différentielle donne a_i à partir de v_i, puis $v_{i+1} = v_i + a_i\,\Delta t$. On vérifie avec les cases voisines du tableau.



3 · Courbe du sujet : l'asymptote horizontale (tirets) donne la vitesse limite $v_{\lim} \approx 25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$9.80 - 1.56 \times 10^{-2} \times 17.2^2$
≈ 5.184896

$17.2 + 5.18 \times 0.5$
≈ 19.79

$\sqrt{\frac{9.80}{1.56 \times 10^{-2}}}$
≈ 25.06402

$\sqrt{\frac{9.80}{1.56 \times 10^{-2}}} \times 3.6$
≈ 90.23047