Mouvement d'un palet

Bac S 2005 Inde (Pondichéry) (ancien programme) · Exercice 4 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h 05**

1.1 En exploitant la figure 3, déterminer les vitesses V_{G2} et V_{G4} du palet aux points G_2 et G_4.

Données utiles $\tau = 20{,}0$ ms ; figure 3 à l'échelle 1

La vitesse en un point est assimilée à la vitesse moyenne entre les deux positions qui l'encadrent.

Sur la figure 3 (échelle 1), on mesure à la règle $G_1G_3 = 4{,}7$ cm et $G_3G_5 = 6{,}3$ cm.

$$V_{G2} = \frac{G_1G_3}{2\tau} = \frac{4{,}7 \times 10^{-2}}{2 \times 20{,}0 \times 10^{-3}} = 1{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

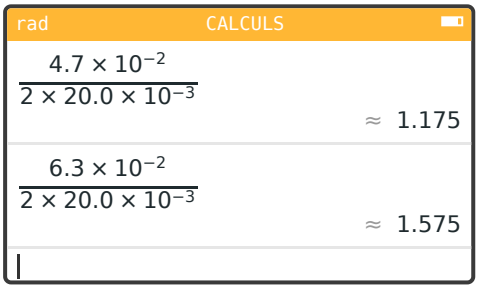
$$V_{G4} = \frac{G_3G_5}{2\tau} = \frac{6{,}3 \times 10^{-2}}{2 \times 20{,}0 \times 10^{-3}} = 1{,}6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$V_{G2} = 1{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $V_{G4} = 1{,}6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

PIÈGE
Diviser par τ au lieu de 2τ : entre G_1 et G_3 il s'écoule deux intervalles de temps. Penser aussi à convertir les centimètres en mètres.

COMPRENDRE
Une longueur lue à la règle est connue au millimètre : deux chiffres significatifs, donc deux pour les vitesses. Sur un sujet réimprimé à une autre échelle, les longueurs mesurées diffèrent ; la méthode reste la même.

À LA CALCULATRICE



1.2 Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}_{G3}$ au point G_3 en fonction de $\vec{V}_{G4}$, $\vec{V}_{G2}$ et τ. En déduire la valeur a_{G3}.

Données utiles $V_{G2} = 1{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $V_{G4} = 1{,}6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (1.1) ; $\tau = 20{,}0$ ms

$$\vec{a}_{G3} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_{G4} - \vec{V}_{G2}}{2\tau}$$

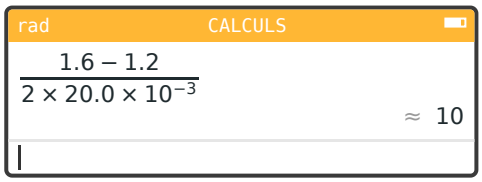
Le mouvement est rectiligne : les deux vecteurs vitesse ont la direction et le sens de l'axe $x'x$. La valeur de l'accélération est donc

$$a_{G3} = \frac{V_{G4} - V_{G2}}{2\tau} = \frac{1{,}6 - 1{,}2}{2 \times 20{,}0 \times 10^{-3}}$$

$a_{G3} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, vecteur dirigé selon $x'x$, vers le haut de la gouttière.

COMPRENDRE
Une différence de deux valeurs proches est peu précise : ce résultat n'est qu'un ordre de grandeur fiable, à écrire sans décimale.

À LA CALCULATRICE



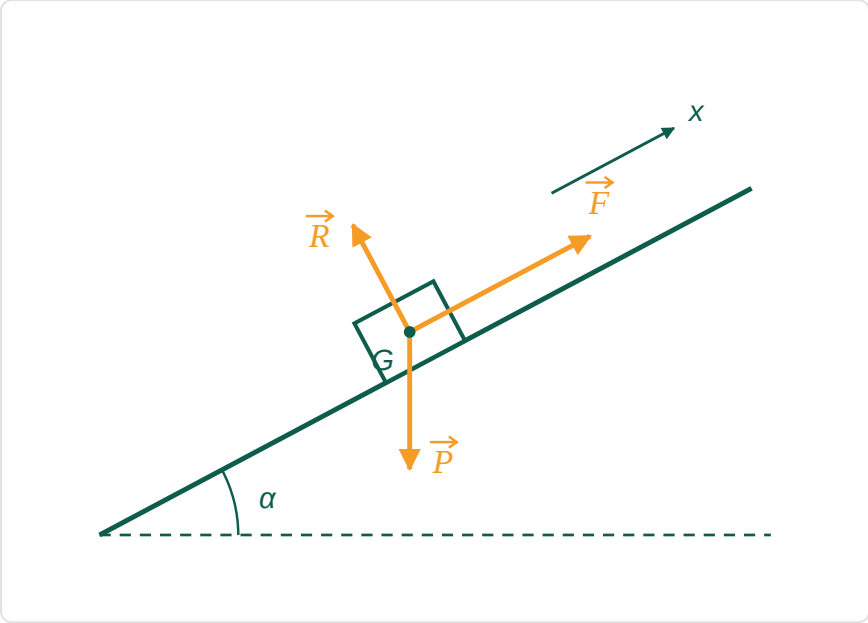
1.3 Faire l'inventaire des forces qui s'appliquent au palet pendant la propulsion et les représenter sur un schéma.

Système {palet}, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les frottements sont négligés. Trois forces :

- le poids $\vec{P}$: vertical, vers le bas, appliqué en G ;
- la réaction $\vec{R}$ de la gouttière : perpendiculaire à la gouttière (pas de frottement), vers le haut ;
- la force $\vec{F}$ exercée par le ressort par l'intermédiaire de la butée B' : parallèle à la gouttière, dans le sens du mouvement.

Trois forces : $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{F}$ (voir schéma).

PIÈGE
Tracer $\vec{R}$ verticale. Sans frottement, la réaction du support est perpendiculaire au support, donc inclinée de α par rapport à la verticale.



1.3 · Forces sur le palet pendant la propulsion (sans souci d'échelle exacte)

1.4 En projetant la seconde loi de Newton sur l'axe $x'x$, exprimer la valeur F de la force de rappel du ressort en fonction de m, g, a_G et α.

Seconde loi de Newton appliquée au palet, de masse constante : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}_G$.

Projection sur l'axe $x'x$, orienté vers le haut de la gouttière :

- $\vec{F}$ est selon l'axe : $F_x = F$;
- $\vec{R}$ est perpendiculaire à l'axe : $R_x = 0$;
- $\vec{P}$ fait l'angle α avec la perpendiculaire à la gouttière : $P_x = -m\,g\sin\alpha$;
- le mouvement se fait le long de l'axe : $a_x = a_G$.

D'où $F - m\,g\sin\alpha = m\,a_G$.

$$\boxed{F = m\,(a_G + g\sin\alpha)}$$

MÉTHODE
Sur un plan incliné d'angle α, le poids se décompose en $m\,g\sin\alpha$ le long de la pente (vers le bas) et $m\,g\cos\alpha$ perpendiculairement. Vérification : si $\alpha = 0$, la composante selon la pente s'annule.

1.5 À partir du résultat de 1.2 et des mesures, calculer la valeur de F au point G_3.

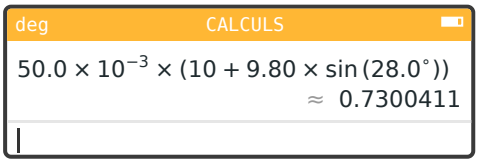
Données utiles $m = 50{,}0$ g ; $g = 9{,}80\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $\alpha = 28{,}0^\circ$; $a_{G3} = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (1.2)

$$F = m\,(a_{G3} + g\sin\alpha) = 50{,}0\times10^{-3}\times(10 + 9{,}80\times\sin 28{,}0^\circ)$$

$$\boxed{F = 0{,}73\ \text{N}}$$

PIÈGE
Laisser la masse en grammes, ou la calculatrice en radians. Le résultat est limité à deux chiffres significatifs par l'accélération mesurée.

À LA CALCULATRICE



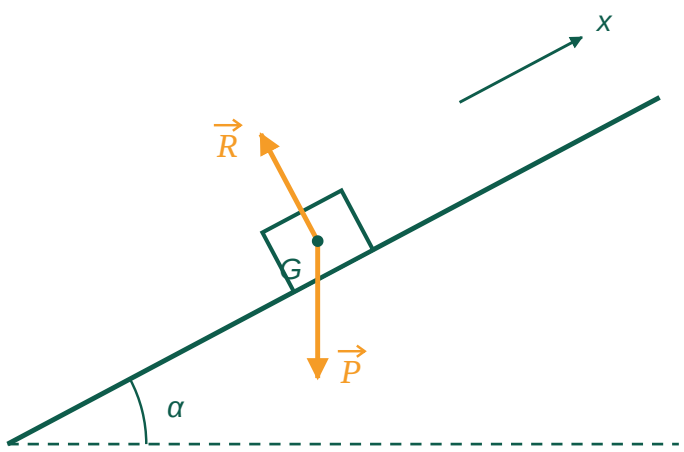
2.1 Faire l'inventaire des forces qui s'appliquent au palet sur le trajet DF et les représenter sur un schéma.

Après D, le ressort n'agit plus sur le palet et les frottements sont négligés. Il reste deux forces :

- le poids $\vec{P}$, vertical, vers le bas ;
- la réaction $\vec{R}$ de la gouttière, perpendiculaire à la gouttière.

Deux forces : $\vec{P}$ et $\vec{R}$ (voir schéma).

PIÈGE
Ajouter une force « de lancement » dirigée vers F. Le palet monte grâce à la vitesse acquise en D ; aucune force ne le pousse plus vers le haut.



2.1 · Forces sur le palet entre D et F

2.2 Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_M(D)$ du palet au point D.

$E_M(D) = E_C(D) + E_{PP}(D)$, avec $E_{PP}(D) = 0$ puisque D est le niveau de référence.

$$E_M(D) = \frac{1}{2} m V_D^2$$

2.3 Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_M(F)$ du palet au point F en fonction de m, g, α et de la distance DF.

En F le palet s'arrête : $V_F = 0$, donc $E_C(F) = 0$.

L'altitude de F au-dessus de D est $z_F = DF \sin\alpha$, donc $E_{PP}(F) = m\,g\,z_F$.

$$E_M(F) = m\,g\,DF\,\sin\alpha$$

PIÈGE
Écrire $E_{PP}(F) = m\,g\,DF$. L'énergie potentielle dépend de l'altitude gagnée, pas de la distance parcourue sur la pente.

2.4 Montrer que l'énergie mécanique du palet se conserve sur le trajet DF. En déduire la valeur de la distance DF.

Données utiles $V_D = 2{,}00\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $g = 9{,}80\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $\alpha = 28{,}0^\circ$

Théorème de l'énergie cinétique entre D et F : $E_C(F) - E_C(D) = W_{DF}(\vec{P}) + W_{DF}(\vec{R})$.

- $\vec{R}$ est perpendiculaire au déplacement : $W_{DF}(\vec{R}) = 0$.
- $W_{DF}(\vec{P}) = m\,g\,(z_D - z_F) = -m\,g\,DF\sin\alpha$.

Donc $0 - \frac{1}{2}\,m\,V_D^2 = -m\,g\,DF\sin\alpha$, soit $\frac{1}{2}\,m\,V_D^2 = m\,g\,DF\sin\alpha$: on retrouve $E_M(D) = E_M(F)$, l'énergie mécanique se conserve.

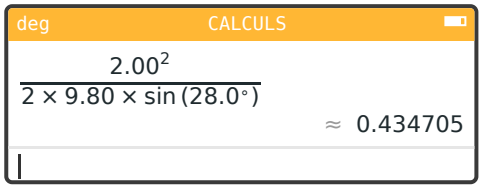
On en déduit :

$$DF = \frac{V_D^2}{2\,g\sin\alpha} = \frac{2{,}00^2}{2\times 9{,}80\times\sin 28{,}0^\circ}$$

$E_M(D) = E_M(F)$ et $DF = 0{,}435$ m

COMPRENDRE
La seule force qui travaille est le poids, force conservative : c'est la raison de la conservation. La masse se simplifie, la distance parcourue ne dépend donc pas du palet utilisé.

À LA CALCULATRICE



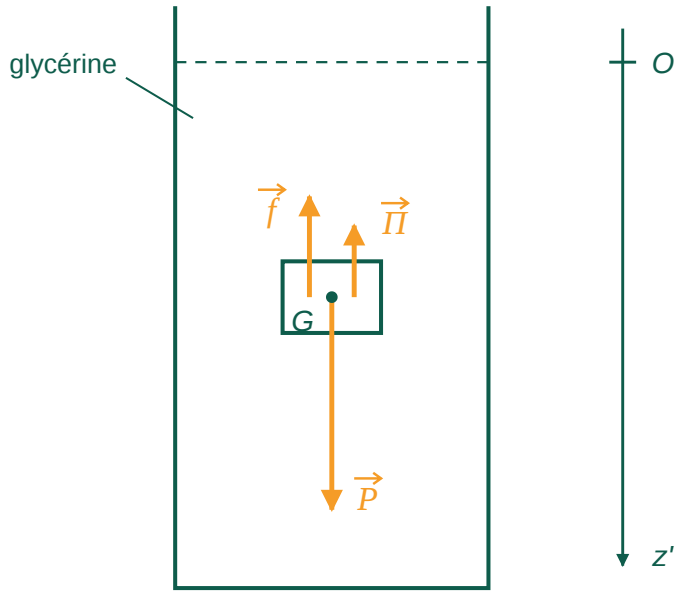
3.1 Faire l'inventaire des forces qui s'appliquent sur le palet pendant sa chute dans la glycérine et les représenter sur un schéma.

Trois forces, toutes verticales :

- le poids $\vec{P}$, vers le bas ;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ exercée par la glycérine, vers le haut ;
- la force de frottement fluide $\vec{f}$, opposée à la vitesse, donc vers le haut puisque le palet descend.

Trois forces : $\vec{P}$ vers le bas, $\vec{\Pi}$ et $\vec{f}$ vers le haut (voir schéma).

PIÈGE
Oublier la poussée d'Archimède. Dans un liquide elle n'est pas négligeable, et la question 3.2 la réclame à travers ρ et V_{0l}.



3.1 · Forces sur le palet dans la glycérine (points d'application décalés pour la lisibilité)

3.2 En appliquant la seconde loi de Newton, montrer que le mouvement du centre d'inertie du palet obéit à une équation du type $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = A - B\,V$. Donner les expressions de A et B en fonction des données, de ρ et de V_{0l}.

Seconde loi de Newton appliquée au palet dans le référentiel terrestre : $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$.

La poussée d'Archimède a pour valeur le poids du volume de glycérine déplacé : $\Pi = \rho\,V_{0l}\,g$.

Projection sur l'axe vertical Oz' orienté vers le bas, avec $a = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$:

$$m\,g - \rho\,V_{0l}\,g - k\,V = m\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

En divisant par m :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = g\left(1 - \frac{\rho\,V_{0l}}{m}\right) - \frac{k}{m}\,V$$

$$\boxed{A = g\left(1 - \frac{\rho\,V_{0l}}{m}\right) \text{ et } B = \frac{k}{m}}$$

PIÈGE

Utiliser la masse volumique de l'acier dans la poussée d'Archimède. C'est celle du fluide déplacé, la glycérine, multipliée par le volume du palet.

COMPRENDRE

A est l'accélération au départ, quand la vitesse est nulle. Elle est inférieure à g à cause de la poussée d'Archimède.

3.3 En utilisant le graphe $V = f(t)$, calculer numériquement les valeurs de A et B en justifiant la démarche.

Le volume du palet n'est pas donné : on détermine A et B sur le graphe.

Valeur de A. À $t = 0$, $V = 0$, donc $\left(\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = A$: A est le coefficient directeur de la tangente à la courbe à l'origine. Cette tangente passe par l'origine et par le point $(0{,}015\ \text{s} ; 0{,}12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})$:

$$A = \frac{0{,}12 - 0}{0{,}015 - 0} = 8{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Valeur de B. Au-delà de $0{,}08$ s environ, la vitesse est constante : $V_{lim} = 0{,}12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Alors $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$, soit $A - B\,V_{lim} = 0$:

$$B = \frac{A}{V_{lim}} = \frac{8{,}0}{0{,}12} = 67\ \text{s}^{-1}$$

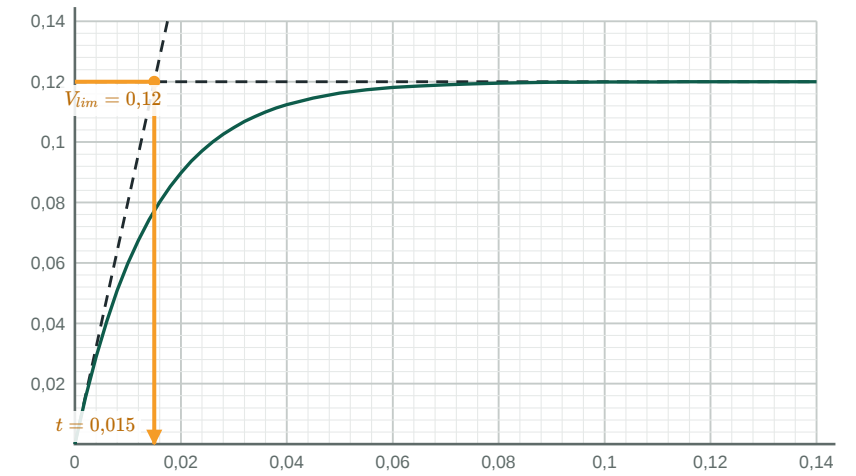
$A = 8{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $B = 67\ \text{s}^{-1}$

COMPRENDRE

Le tracé d'une tangente à la main est peu précis : toute valeur de A entre 8 et 9 $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ est recevable, avec la valeur de B qui en découle. A reste bien inférieur à g, comme prévu en 3.2.

MÉTHODE

La tangente à l'origine coupe l'asymptote $V = V_{lim}$ à la date $t = 1/B$, temps caractéristique du régime transitoire. Lire cette date donne directement B.



3.3 · Graphe du sujet : tangente à l'origine et asymptote

À LA CALCULATRICE

